

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学籍番号と氏名を明記せよ。

1. $a > 0, b > 0$ のとき下記の等式 (1) ~ (7) のなかで一般には成り立たないものの番号を全て挙げよ。ただし、 e は自然対数の底である。

$$(1) \log_a 1 = 0 \quad (2) \log_a a = 1 \quad (3) \log_a \frac{1}{a} = -a \quad (4) \log_{1/a} b = -\frac{1}{\log_a b}$$

$$(5) \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad (6) a^b = e^{b \log_e a} \quad (7) \log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a}$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$ を求めよ。

3. $y = \arccos \frac{x}{2}$ のグラフを描け。曲線の端点や座標軸切片の座標を書き入れたら接線の傾きのわかっている点での接線を薄く描き入れるなどしてできるだけ精密に描け。

4. $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}}$ を求めよ。

5. $\cosh(x + y)$ を $\cosh x$ 、 $\sinh x$ 、 $\cosh y$ 、 $\sinh y$ を用いて表す式(「双曲線余弦関数の加法定理」という)を書き、その式を \cosh と \sinh の定義から出発して導出せよ。

材料開発工学科1年生 微分積分I小テスト(2000/6/2実施)の解答

① 3, 4
(20点)

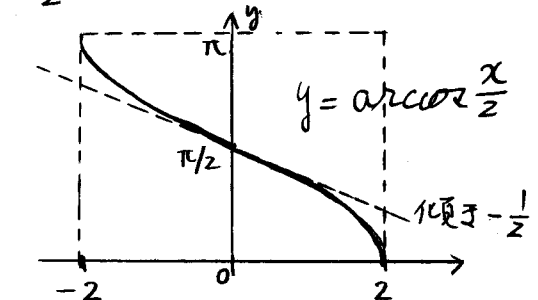
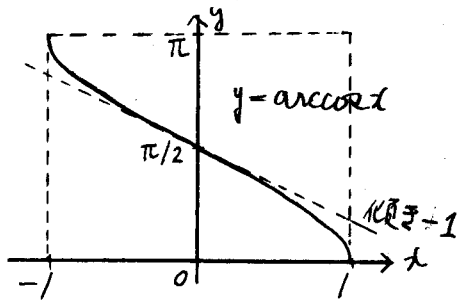
(3)は $\log_a \frac{1}{a} = -1$, (4)は $\log_{1/a} b = -\log_a b$ が正しい式。
ひとつ合えば10点, ひとつまちがえば-10点

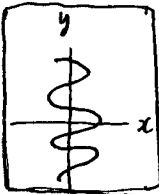
② (20点)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x^2+x+1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ (x>0 \text{ とする})}}{=} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow{(x \rightarrow \infty)} \frac{\sqrt{1+0+0}+1}{1+0} = 2$$

③ (20点) $y = \arccos x$ のグラフは下記の通り。 $y = \arcsin \frac{x}{2}$ のグラフはこれを横方向に2倍に伸ばしたもの。



(注)  のような多価関数ではなく、教科書にある通りに枝を選択して下さい。

④ (20点)

$$a = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ とおくと, } 0 < a < \frac{\pi}{2}, \sin a = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos a = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$b = \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ とおくと, } 0 < b < \frac{\pi}{2}, \sin b = \frac{1}{\sqrt{26}}, \cos b = \sqrt{1 - \frac{1}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{\sqrt{13}} \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 < a+b < \pi \text{ だから } a+b = \frac{\pi}{4}$$

(注) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ からは $0 < a+b < \pi$ だから $a+b = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ の2つの可能性があるとわかるが、 \arcsin は1価関数だから答はひとつのはず。より詳しく考えれば $\frac{3\pi}{4}$ は不適とわかる。

⑤ (20点)

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

(導出) $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ だから

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y) = \text{(左辺)} \end{aligned}$$