

ノイズがある場合の量子状態識別

2010年2月

福井大学 工学部 物理工学科

04380525 若林 隼吾

目次

第1章	序論	2
第2章	量子力学の性質と Bloch 球	3
2.1	重ね合わせの原理	3
2.2	量子状態の測定	3
2.3	Bloch 球	4
第3章	ノイズがない場合の量子状態識別	6
3.1	qubit が 1 個の場合	6
3.2	qubit が N 個の場合	7
3.2.1	個別測定 (多数決法)	8
3.2.2	個別測定 (適応法)	9
3.2.3	集団測定	12
3.3	識別成功確率の比較	13
第4章	ノイズがある場合の量子状態識別	14
4.1	ノイズがある場合の量子状態	14
4.2	qubit が 1 個の場合	15
4.3	qubit が N 個の場合	16
4.3.1	個別測定 (多数決法)	16
4.3.2	個別測定 (適応法)	18
4.4	識別成功確率の比較	21
第5章	まとめ	25
5.1	結論	25
5.2	今後の課題	26
	参考文献	27
	謝辞	28

第1章 序論

量子情報の分野では量子コンピュータや量子暗号などの研究が進められ、既存の技術では成し得ない超並列処理が可能な計算機や絶対安全な通信の実用化が期待されている。ではそれらの技術の基盤となる、量子情報とはいったいどのようなものなのだろうか。

現在我々が日常的に使用しているコンピュータは「0」または「1」の値をとる「ビット」というものを操作することにより計算を行っている。情報処理分野ではこの古典ビットを用いることによって様々な処理を行っているのである。しかし量子情報の分野では古典ビットではなく量子ビット (qubit) というものを用いる。この量子ビットは量子力学の性質である重ね合わせの原理を用いるため「0」と「1」状態だけでなく「0」と「1」の重ね合わせの状態をとることができる。この量子力学の性質を利用した qubit を用いることによって量子コンピュータや量子暗号などの技術が可能になるのである。そして、このように量子力学の性質を情報処理に積極的に使用するのが量子情報という分野である。

量子情報では量子力学の性質を利用するため重ね合わせの原理だけでなく不確定性原理や測定後の状態が壊れるといった性質も絡んでくる。そのため、ある量子状態の qubit に正規直交基底で測定を行うと測定は確率的で測定結果が確定することはなく、測定後の状態は壊れてしまうのである。したがって同じ qubit を何度も測定するということはできない。そのため最適な量子状態の識別方法というものが重要になってくる。

そこで本研究では、qubit がある確率で2つの状態のどちらかに準備されているとき、この2つの状態を識別する最適な測定方法について考える。まず、qubit が1個の場合の最適な測定方法の確認からはじまり、qubit の個数を増やしていったときに、qubit を個々に測定し多数決で状態を識別する個別測定 (多数決法) や前の qubit に対する測定結果の情報から測定方法を変更する個別測定 (適応法)、そして qubit 全体を一つの系とみなし測定する集団測定といった測定方法での識別成功確率はどう変化するのかを確認する。そして準備された状態にノイズがあった場合にそれぞれの測定方法に対する影響を調べることを本研究の目的とし、その結果から有効な測定方法を検討する。

第2章 量子力学の性質と Bloch 球

この章では序論で触れた量子力学の性質である重ね合わせの原理や状態の測定と、量子状態の図示に用いる Bloch 球について説明する。

2.1 重ね合わせの原理

量子情報で用いる qubit は $|0\rangle$ か $|1\rangle$ の状態しか取れない古典ビットとは異なり、2つの基本的な状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の重ね合わせの状態をとることができる。その重ね合わせの状態は次のように表される。

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

ここで α と β は複素数で、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ で規格化されている。そして基本的状態 $|0\rangle, |1\rangle$ は大きさ 1 が互いに直交している正規直交基底である。

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1 \quad (2.2)$$

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \quad (2.3)$$

2.2 量子状態の測定

(2.1) 式の状態 $|\phi\rangle$ を正規直交基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で測定すると図 2.1 のように測定後の状態は $|\alpha|^2$ で $|0\rangle$ となり、 $|\beta|^2$ で $|1\rangle$ となる。すなわち測定は確率的で状態を壊す。

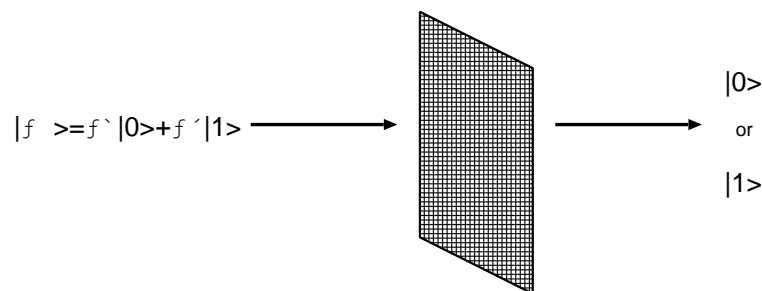


図 2.1: 正規直交基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ での測定

2.3 Bloch 球

qubit の状態を視覚的にとらえるのに便利な方法として Bloch 球を用いる方法がある。まず、qubit の状態 (2.1) 式は長さ 1 に規格化されているので、次のように書くことができる。

$$|\phi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (2.4)$$

ここで $e^{i\gamma}$ は観測時の確率に影響を及ぼさないので無視することができる。したがって (2.4) 式は次のように表すことができる。

$$|\phi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.5)$$

θ と ϕ は 3 次元単位球面上の点を定義し、状態は図 2.2 に示す球面上の 1 点で表される。

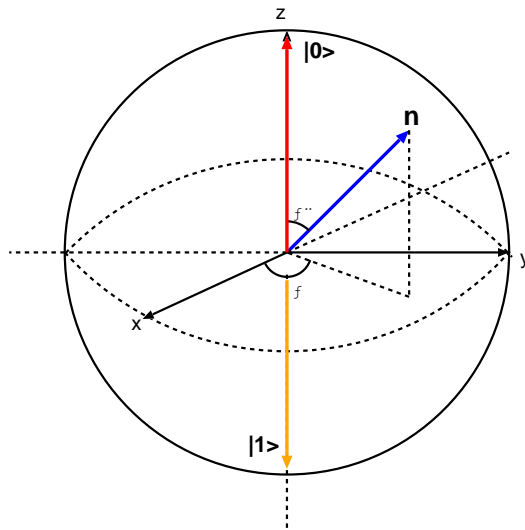


図 2.2: Bloch 球

図 2.2 の球面を Bloch 球という。状態 $|0\rangle$ が球面上の北極に対応し状態 $|1\rangle$ が南極に対応している。そして Bloch 球上の単位ベクトル \mathbf{n} を Bloch ベクトルと呼ぶ。一般に Bloch ベクトルで表記した qubit の状態は次のようになる。

$$|\mathbf{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.6)$$

次にこの Bloch ベクトルを用いて qubit の内積公式を求める。まず $|\mathbf{n}\rangle$ と $|\mathbf{n}'\rangle$ の内積は

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n} | \mathbf{n}' \rangle &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \langle 0 | + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \langle 1 | \right) \left(\cos \frac{\theta'}{2} | 0 \rangle + e^{i\phi'} \sin \frac{\theta'}{2} | 1 \rangle \right) \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \cos(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) - i \left(\sin(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right)\end{aligned}\tag{2.7}$$

となる。したがって内積の 2 乗は次のように表される。

$$\begin{aligned}|\langle \mathbf{n} | \mathbf{n}' \rangle|^2 &= \left| \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \cos(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) - i \left(\sin(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')) \\ &= \frac{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}{2}\end{aligned}\tag{2.8}$$

第3章 ノイズがない場合の量子状態 識別

ノイズがある場合の識別を考える前にノイズがない場合での状態の識別成功確率がどのようなものになるのか見ていく必要がある。ここでは qubit が 1 個の場合に始まり、qubit が N 個与えられたときの個別測定、集団測定での識別成功確率を求める。

3.1 qubit が 1 個の場合

確率 η_1 で状態 $|\phi_1\rangle = |\mathbf{n}_1\rangle$ が、確率 η_2 で状態 $|\phi_2\rangle = |\mathbf{n}_2\rangle$ が与えられる場合を考える。このときに正規直交基底 $\{|\mathbf{m}\rangle, |-\mathbf{m}\rangle\}$ でこの qubit 1 個に対して測定を行うと状態は壊れるので測定後は $|\mathbf{m}\rangle$ または $|-\mathbf{m}\rangle$ となる。このとき、測定後の状態が $|\mathbf{m}\rangle$ なら $|\phi_1\rangle$ と $|-\mathbf{m}\rangle$ なら $|\phi_2\rangle$ であると判断することとする。

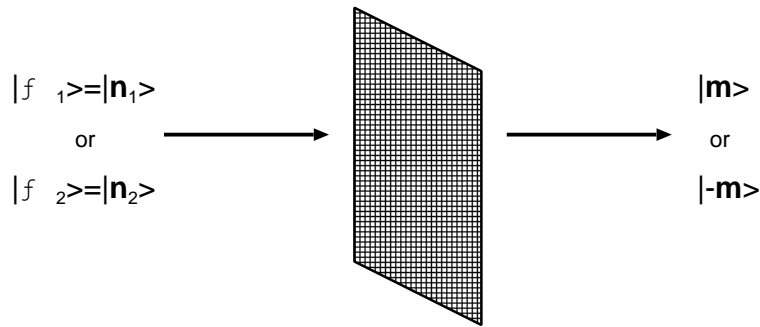


図 3.1: 正規直交基底 $\{|\mathbf{m}\rangle, |-\mathbf{m}\rangle\}$ での測定

確率 η_1 で $|\phi_1\rangle$ が与えられたときに $|\mathbf{m}\rangle$ を観測する確率は次のように表される。

$$\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2 = \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_1}{2} \quad (3.1)$$

一方、確率 η_2 で $|\phi_2\rangle$ が与えられたときに $|-\mathbf{m}\rangle$ を観測する確率は

$$\eta_2 |\langle -\mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2 = \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_2)}{2} \quad (3.2)$$

となる。したがって qubit が 1 個の場合に識別が成功する確率は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
P^{(1)} &= \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_1}{2} + \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_2)}{2} \\
&= \frac{1 + \mathbf{m} \cdot (\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2)}{2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで (3.3) 式の識別成功確率を最大にする \mathbf{m} は、 \mathbf{m} が単位ベクトルなのでシュワルツの不等式から次のように表すことができる。

$$\mathbf{m} = \frac{\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2}{|\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2|} \tag{3.4}$$

ここで $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ は

$$|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = \frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \tag{3.5}$$

と表すことができるので、(3.5) 式と (3.4) 式を用いて (3.3) 式を変形すると

$$P^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}}{2} \tag{3.6}$$

となる。これが qubit を 1 個与えられたときの最大識別成功確率となる。

3.2 qubit が N 個の場合

3.1 では qubit が 1 個の場合での識別成功確率を求めた。では、与えられる qubit が N 個の場合、識別成功確率はどうなるのだろうか。

確率 η_1 で $\underbrace{|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle\cdots}_{N \text{ 個}}$ 、または確率 η_2 で $\underbrace{|\phi_2\rangle|\phi_2\rangle|\phi_2\rangle\cdots}_{N \text{ 個}}$ あたえられる場合を考えてみる。まずこの場合には次 2 つの測定方法があげられる。

- qubit を個別に測定し量子状態の識別を行う方法 (個別測定)
- qubit 全体を一つの系とみなして測定し量子状態の識別を行う方法 (集団測定)

この 2 つの測定方法では個別測定を含む測定方法である集団測定が優れている。しかし集団測定は実験的には難しい測定方法であるため個別測定での優れた識別方法が重要となってくる。そして、その個別測定には次にあげる 2 つの方法がある。

- qubit を個別に測定し、多く出た方の状態であると推論する多数決を用いる方法（個別測定 多数決法）
- qubit を個別に測定し、前の測定結果の情報から η_1, η_2 を変更し、あらたな $\{ |m\rangle, |-m\rangle \}$ で測定する方法（個別測定 適応法）

最適な識別方法を考えるためにはそれぞれの方法での識別成功確率を求める必要がある。

3.2.1 個別測定 (多数決法)

qubit が N 個与えられる場合、多数決で状態の識別を行うには η_1 で $|\phi_1\rangle$ が与えられたときに識別が成功する確率、 η_2 で $|\phi_2\rangle$ が与えられたときに識別が成功する確率とそれぞれの場合に識別が失敗する確率を求める必要がある。

まず η_1 で $|\phi_1\rangle$ が与えられたときに識別が成功する確率は (3.1) 式から次のように表される。

$$\begin{aligned} \eta_1 |\langle m | \phi_1 \rangle|^2 &= \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_1}{2} \\ &= \eta_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

一方で識別が失敗する確率は

$$\begin{aligned} \eta_1 |\langle -m | \phi_1 \rangle|^2 &= \eta_1 \left(1 - \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_1}{2} \right) \\ &= \eta_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

と表される。 η_2 で $|\phi_2\rangle$ が与えられる場合も同様に計算すると、識別が成功する確率は

$$\begin{aligned} \eta_2 |\langle -m | \phi_2 \rangle|^2 &= \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_2)}{2} \\ &= \eta_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

となり、識別が失敗する確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_2 |\langle m | \phi_2 \rangle|^2 &= \eta_2 \left(1 - \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_2)}{2} \right) \\ &= \eta_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

これらの式を用いて qubit の個数 N が奇数の場合を考える。

まず η_1 で $|\phi_1\rangle$ が N 個与えられたときに状態の識別が成功するには測定結果で $|\phi_1\rangle$ の個数が $|\phi_2\rangle$ の個数より多く出る必要がある、したがって測定結果で $|\phi_1\rangle$ が $|\phi_2\rangle$ よりも多く出るときの全ての組み合わせでの識別成功確率を求めると次のように表される。

$$P_1^{(N)} = \eta_1 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \quad (3.11)$$

同様に η_2 で $|\phi_2\rangle$ が N 個与えられた場合での識別成功確率を求めると

$$P_2^{(N)} = \eta_2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \quad (3.12)$$

となる。したがって qubit が N 個の場合の識別成功確率は次式で表される。

$$P^{(N)} = \eta_1 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \\ + \eta_2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \quad (3.13)$$

(3.13) 式が個別測定 (多数決法) による識別成功確率である。

ただし (3.13) 式は η_1, η_2 が同確率のときに最適となる形となっている。そして N が偶数個の場合には測定結果で $|\phi_1\rangle$ と $|\phi_2\rangle$ が同数出てくる組み合わせも考えられ、多数決で決めることはできないので確率 $\frac{1}{2}$ で $|\phi_1\rangle$ か $|\phi_2\rangle$ のどちらかであると判断しなければならない。そのため偶数個では $\frac{N-1}{2}$ まで求めていた項の数を $\frac{N}{2}$ まで求め、最後の項の組み合わせの数を $\frac{1}{2} {}_N C_{\frac{N}{2}}$ とする必要がある。

3.2.2 個別測定 (適応法)

個別測定 (適応法) での状態の識別では前の測定結果の情報を受けて η_1, η_2 を変更するという方法を取る。具体的に $N=2$ の時を見ていくと、1 回目の測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ のときに $|\phi_1\rangle$ である確率を η'_1 とすると、その確率は次のように表される。

$$\eta'_1 = \frac{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2} \quad (3.14)$$

ここで (3.14) 式に (3.7), (3.10) 式を代入し整理すると

$$\eta'_1 = \frac{\eta_1 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 + 1 \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + \eta_1 - \eta_2} \quad (3.15)$$

となる。同様に 1 回目の測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ のときに $|\phi_2\rangle$ である確率を η'_2 とし、その確率を求めると次式で表される。

$$\begin{aligned} \eta'_2 &= \frac{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2} \\ &= \frac{\eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 - 1 \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + \eta_1 - \eta_2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

次に 1 回目の測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ であったときを見ていくと、 $|\mathbf{-m}\rangle$ のときに $|\phi_1\rangle$ である確率を η''_1 とするとその確率は

$$\begin{aligned} \eta''_1 &= \frac{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi_1 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi_2 \rangle|^2} \\ &= \frac{\eta_1 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 - 1 \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + \eta_2 - \eta_1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。同様に 1 回目の測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ のときに $|\phi_2\rangle$ である確率を η''_2 とし、その確率を求めると次式で表される。

$$\begin{aligned} \eta''_2 &= \frac{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi_2 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi_2 \rangle|^2} \\ &= \frac{\eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 + 1 \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + \eta_2 - \eta_1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

次に 1 回目の測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ である確率を P_1 、1 回目の測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ である確率を P_2 とすると $N = 2$ のときの識別成功確率は次のようになる。

$$P^{(2)} = P_1 \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta'_1\eta'_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}}{2} + P_2 \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta''_1\eta''_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}}{2} \quad (3.19)$$

ここで P_1, P_2 は

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \eta_1 |\langle -\mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle -\mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

で表され、 $\eta'_1 \eta'_2$ を計算すると

$$\begin{aligned} \eta'_1 \eta'_2 &= \frac{2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \eta_1 \eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} (\eta_1 - \eta_2) - 2\eta_1\eta_2 (1 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 1 \right)}{\left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + \eta_1 - \eta_2 \right)^2} \\ &= \frac{2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \eta_1 \eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} (\eta_1 - \eta_2) - 2\eta_1\eta_2 (1 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 1 \right)}{2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} (\eta_1 - \eta_2) - 2\eta_1\eta_2 (1 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 1 \right)} \\ &= \eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。同様に $\eta''_1 \eta''_2$ を求めると

$$\begin{aligned} \eta''_1 \eta''_2 &= \frac{2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \eta_1 \eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} (\eta_2 - \eta_1) - 2\eta_1\eta_2 (1 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 1 \right)}{\left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + \eta_2 - \eta_1 \right)^2} \\ &= \frac{2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \eta_1 \eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} (\eta_2 - \eta_1) - 2\eta_1\eta_2 (1 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 1 \right)}{2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} (\eta_2 - \eta_1) - 2\eta_1\eta_2 (1 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 1 \right)} \\ &= \eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

となり、同じ値となることが分かる。そして (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) 式を (3.19) 式に代入し整理すると次のようになる。

$$P^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^4}}{2} \quad (3.24)$$

(3.24) 式が $N = 2$ のときの個別測定 (適応法) による識別成功確率である。

$N = 3$ 以降も同様に求めることができるのでこの式を N で一般化すると次式で表される。

$$P^{(N)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^{2N}}}{2} \quad (3.25)$$

(3.25) 式が qubit が N 個の場合の個別測定 (適応法) による識別成功確率である。

3.2.3 集団測定

集団測定での状態の識別は qubit 全体を一つの系とみなし測定を行う。まず具体的に個別測定 (適応法) のときと同様に $N = 2$ のときを見ていくと、2qubit 系での状態は 4次元ベクトル空間で表されるが必要な成分は $|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle|\phi_2\rangle$ なので 2次元空間として考えることができる。したがって qubit が 1 個のときと同じ形で求めることができる。 $|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle|\phi_1\rangle, |\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle|\phi_2\rangle$ とすると識別成功確率の式は次のようになる。

$$P^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2}}{2} \quad (3.26)$$

ここで $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$ は

$$\begin{aligned} |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 &= |(\langle \phi_1 | \langle \phi_1 |) (|\phi_2\rangle |\phi_2\rangle)|^2 \\ &= |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \\ &= |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^4 \end{aligned} \quad (3.27)$$

と表すことができるので、(3.26) 式は

$$P^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^4}}{2} \quad (3.28)$$

ノイズがある場合の識別に関する最近の研究には文献があるとなる。 $N = 3$ 以降も同様に考えることができるので N で一般化した式は次のように表される。

$$P^{(N)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^{2N}}}{2} \quad (3.29)$$

(3.29) 式が qubit が N 個の場合の集団測定での識別成功確率である。そして、この式は個別測定 (適応法) での識別成功確率 (3.25) 式と一致することが分かる。

3.3 識別成功確率の比較

qubit が N 個のときの個別測定 (多数決法)、個別測定 (適応法)、集団測定それぞれの測定での識別成功確率を計算により求めた結果、個別測定 (適応法) と集団測定の識別成功確率が一致することが分かった。

次にそれぞれの測定方法においてプログラム上で実際に数値を与え個別測定 (多数決法) と個別測定 (適応法) の識別成功確率の比較を行うため、 $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$, $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.6$ とし、 N を変化させたときの識別成功確率の値をプロットしたものを図 3.2 に示す。

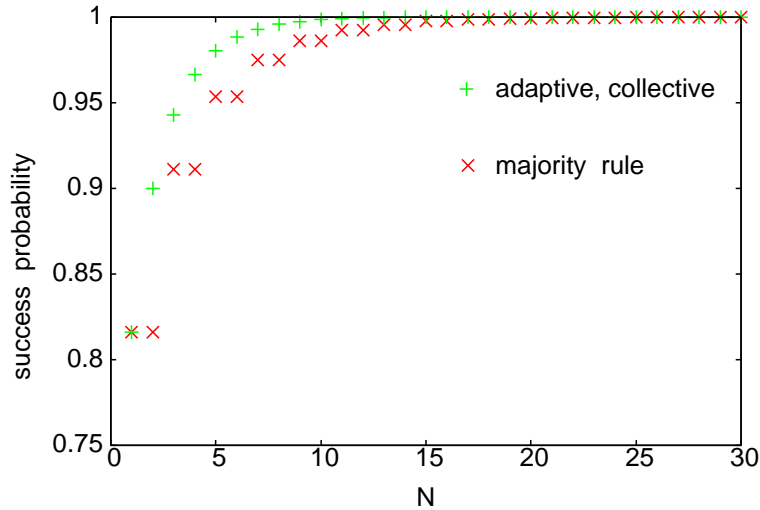


図 3.2: qubit の個数を変化させたときの識別成功確率

図 3.2 のグラフから、前述したように優れた測定方法である集団測定と個別測定 (適応法) の識別成功確率は一致し、ノイズが無い場合の個別測定 (多数決法) は個別測定 (適応法) よりも識別成功確率が劣るということが確認された。

第4章 ノイズがある場合の量子状態 識別

第3章ではノイズがない場合の識別成功確率を求め、比較を行った。その結果、個別測定(多数決法)が個別測定(適応法)よりも識別成功確率が劣ることが確認された。

ではノイズがある場合での識別成功確率はどうなるのだろうか。ノイズがある場合の識別に関する最近の研究には文献[1]があるが、本研究では準備された状態にノイズがあった場合にノイズがない場合のときと同じ測定法を用いたらどのような影響がでるのかを調べる。したがって、この章ではノイズがない場合のときと同じ測定法を用いて、qubitが1個の場合から考え、qubitがN個のときの個別測定(多数決法)、個別測定(適応法)での識別成功確率を求め、ノイズの影響を調べる。

4.1 ノイズがある場合の量子状態

まず、ノイズがある場合の状態 $|n'\rangle$ は、図4.2に示すように Bloch 球上で $|n\rangle$ のまわりに等方的に分布していると仮定する。

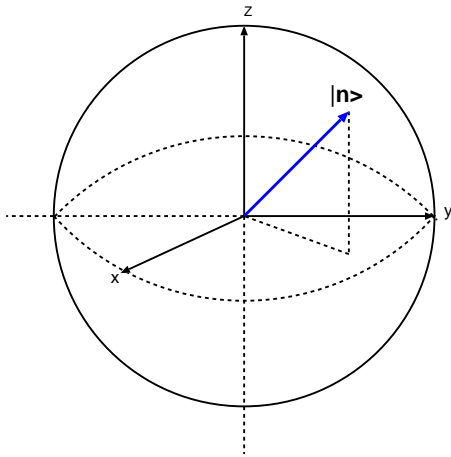


図 4.1: ノイズがない場合 $|n\rangle$

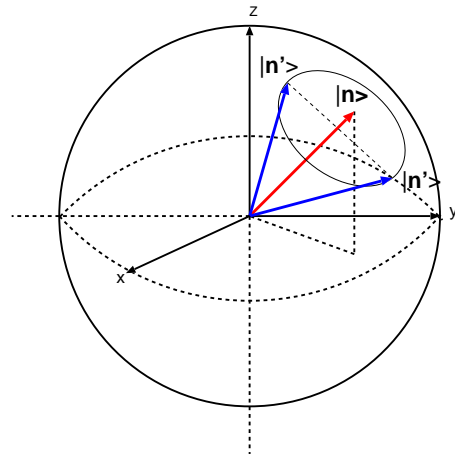


図 4.2: ノイズがある場合 $|n'\rangle$

したがって n' を平均すると方向は n と同じで長さが n よりも短くなる。よって n' の平均 $\langle n' \rangle$ は

$$\langle n' \rangle = rn \quad (0 < r \leq 1) \quad (4.1)$$

と表すことができる。 $r = 1$ はノイズが無い状態である。

4.2 qubit が 1 個の場合

qubit が 1 個の場合は確率 η_1 で状態 $|\phi'_1\rangle = |\mathbf{n}'_1\rangle$ が、確率 η_2 で状態 $|\phi'_2\rangle = |\mathbf{n}'_2\rangle$ が与えられる場合を考える。

まず確率 η_1 で $|\phi'_1\rangle$ が与えられたときに $|\mathbf{m}\rangle$ を観測する確率は

$$\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2 = \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_1}{2} \quad (4.2)$$

であり、次に確率 η_2 で $|\phi'_2\rangle$ が与えられたときに $|\mathbf{-m}\rangle$ を観測する確率は

$$\eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_2 \rangle|^2 = \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_2)}{2} \quad (4.3)$$

となる。したがって識別成功確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_1}{2} + \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_2)}{2} \\ &= \frac{1 + \mathbf{m} \cdot (\eta_1 \mathbf{n}'_1 - \eta_2 \mathbf{n}'_2)}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで \mathbf{m} の式 (3.4) を代入すると $P^{(1)}$ は

$$P^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta_1 (\eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_1) + \eta_2 (\eta_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_2 - \eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \quad (4.5)$$

で与えられる。ここで \mathbf{n}'_1 と \mathbf{n}'_2 の平均をとると (4.1) 式から $\langle \mathbf{n}'_1 \rangle = r \mathbf{n}_1$, $\langle \mathbf{n}'_2 \rangle = r \mathbf{n}_2$ と置き換えることができる。したがって (4.5) 式は

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r \eta_1 (\eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1) + \eta_2 (\eta_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 - \eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \\ &= \frac{1 + r \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

と表すことができる。以後の計算では置き換えた形を用いることとする。(4.6) 式がノイズが存在する場合での qubit 1 個の識別成功確率である。式の形はノイズがない場合の識別成功確率 (3.6) 式と似ているが分子にノイズの影響 r が現れているためノイズが大きくなる (r が小さくなる) と識別成功確率が低くなる。

4.3 qubit が N 個の場合

qubit が N 個与えられる場合ではノイズによる影響はどのようなだろうか。
 確率 η_1 で $\underbrace{|\phi'_1\rangle|\phi''_1\rangle|\phi'''_1\rangle\cdots}_{N \text{ 個}}$, または確率 η_2 で $\underbrace{|\phi'_2\rangle|\phi''_2\rangle|\phi'''_2\rangle\cdots}_{N \text{ 個}}$ あたえられる場合を考
 えてみる。

この場合ではノイズ影響下における個別測定 (多数決法) と個別測定 (適応法) の識別
 成功確率を求め、比較を行う。

4.3.1 個別測定 (多数決法)

個別測定 (多数決法) ではノイズがない場合と同様の手順で識別成功確率を求める。
 まず、 η_1 で $|\phi'_1\rangle$ が与えられたときに識別が成功する確率は (4.2) 式から

$$\begin{aligned}
 \eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2 &= \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_1}{2} \\
 &= \eta_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_1}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \\
 &= \eta_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{r(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

となる。この式から識別が失敗する確率を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \eta_1 |\langle -\mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2 &= \eta_1 \left(1 - \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_1}{2} \right) \\
 &= \eta_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{r(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

次に η_2 で $|\phi'_2\rangle$ が与えられたときに識別が成功する確率は (4.3) 式から

$$\begin{aligned}
 \eta_2 |\langle -\mathbf{m} | \phi'_2 \rangle|^2 &= \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_2)}{2} \\
 &= \eta_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_2 - \eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_2}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \\
 &= \eta_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{r(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

である。一方、識別が失敗する確率は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi'_2 \rangle|^2 &= \eta_2 \left(1 - \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}'_2)}{2} \right) \\
&= \eta_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

次に qubit の個数 N が奇数であるとし、 η_1 で $|\phi'_1\rangle|\phi''_1\rangle|\phi'''_1\rangle\cdots$ が与えられたときに測定結果で $|\mathbf{m}\rangle$ が $|\mathbf{-m}\rangle$ よりも多く出る全ての組み合わせでの識別成功確率を求めると次のようになる。

$$P_1^{(N)} = \eta_1 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{r \left(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{r \left(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \quad (4.11)$$

同様に η_2 で $|\phi'_2\rangle|\phi''_2\rangle|\phi'''_2\rangle\cdots$ が与えられたときに測定結果で $|\mathbf{-m}\rangle$ が $|\mathbf{m}\rangle$ よりも多く出る全ての組み合わせでの識別成功確率を求めると

$$P_2^{(N)} = \eta_2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \quad (4.12)$$

となる。したがって qubit が N 個の場合での個別測定 (多数決法) による識別成功確率は次式で表される。

$$\begin{aligned}
P^{(N)} &= \eta_1 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{r \left(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{r \left(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \\
&\quad + \eta_2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} {}_N C_{N-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right)}{2\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \quad (4.13)
\end{aligned}$$

(4.13) 式はノイズがない場合の個別測定 (多数決法) の識別成功確率の式 (3.13) と同様に η_1, η_2 が同確率のときに最適となる形となっている。そして N が偶数個の場合には測定結果で $|\mathbf{m}\rangle$ と $|\mathbf{-m}\rangle$ が同数出てくる組み合わせも考えられ、多数決で決めることはできないので確率 $\frac{1}{2}$ で $|\phi'_1\rangle$ か $|\phi'_2\rangle$ のどちらかであると判断しなければならない。そのため奇数個では $\frac{N-1}{2}$ まで求めていた項の数を $\frac{N}{2}$ まで求め、最後の項の組み合わせの数を $\frac{1}{2} {}_N C_{\frac{N}{2}}$ とする必要がある。

4.3.2 個別測定 (適応法)

個別測定 (適応法) においてもノイズがない場合と同様の手順で識別成功確率を求める。

まず、具体的に $N = 2$ の場合を見ていくと、1 回目の測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ のときに $|\phi'_1\rangle$ である確率を η'_1 とするとその確率は

$$\eta'_1 = \frac{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi'_2 \rangle|^2} \quad (4.14)$$

である。(4.14) 式に (4.7),(4.10) 式を代入し整理すると

$$\eta'_1 = \frac{\eta_1 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + r \left(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right) \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + r (\eta_1 - \eta_2)} \quad (4.15)$$

となる。次に 1 回目の測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ のときに $|\phi'_2\rangle$ である確率を η'_2 とするとその確率は次のようになる。

$$\eta'_2 = \frac{\eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi'_2 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi'_2 \rangle|^2} \quad (4.16)$$

(4.16) 式に (4.7),(4.10) 式を代入し整理すると

$$\eta'_2 = \frac{\eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} - r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right) \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + r (\eta_1 - \eta_2)} \quad (4.17)$$

と表される。

次に 1 回目の測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ のときを見ていくと、測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ のときに $|\phi'_1\rangle$ である確率を η''_1 とするとその確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta''_1 &= \frac{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_1 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_2 \rangle|^2} \\ &= \frac{\eta_1 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} - r \left(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right) \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + r (\eta_2 - \eta_1)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

同様に測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ のときに $|\phi'_2\rangle$ である確率を η''_2 とするとその確率は

$$\begin{aligned} \eta''_2 &= \frac{\eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_2 \rangle|^2}{\eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_2 \rangle|^2} \\ &= \frac{\eta_2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + r \left(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \right) \right)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} + r (\eta_2 - \eta_1)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

と表される。

ここで1回目の測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ である確率を P_1 、1回目の測定結果が $|\mathbf{-m}\rangle$ である確率を P_2 とすると $N=2$ のときの識別成功確率は次のように表される。

$$P^{(2)} = P_1 \frac{1 + r\sqrt{1 - 4\eta'_1\eta'_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2} + P_2 \frac{1 + r\sqrt{1 - 4\eta''_1\eta''_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2} \quad (4.20)$$

ここでの P_1, P_2 は

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi'_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{m} | \phi'_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r(\eta_1 - \eta_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \eta_1 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle \mathbf{-m} | \phi'_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r(\eta_2 - \eta_1)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

で与えられる。次に $\eta'_1\eta'_2$ を (4.15),(4.17) 式を用いて計算すると次式で表される。

$$\begin{aligned} \eta'_1\eta'_2 &= \frac{\eta_1\eta_2 \left(1 - r^2 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (1 + r^2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 2r |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \left(\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (\eta_1 - \eta_2) + r \right) \right)}{1 + r^2 - 4\eta_1\eta_2 (r^2 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2) + 2r \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (\eta_1 - \eta_2)} \\ &= \eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \left(1 + (1 - r^2) \frac{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2r \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (\eta_1 - \eta_2) + 1 + r^2 - 4\eta_1\eta_2 (r^2 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)} \frac{1 - |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} \right) \end{aligned}$$

ここで表記を簡単化するために

$$\Delta(\eta_1, \eta_2) = (1 - r^2) \frac{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2r \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (\eta_1 - \eta_2) + 1 + r^2 - 4\eta_1\eta_2 (r^2 + |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)} \frac{1 - |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}$$

とおくと、 $\eta'_1\eta'_2$ は次のようになる。

$$\eta'_1\eta'_2 = \eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (1 + \Delta(\eta_1, \eta_2)) \quad (4.23)$$

同様に $\eta''_1\eta''_2$ を (4.18),(4.19) 式を用いて計算すると次のように表される。

$$\eta''_1\eta''_2 = \eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 (1 + \Delta(\eta_2, \eta_1)) \quad (4.24)$$

$\Delta(\eta_2, \eta_1)$ は $\Delta(\eta_1, \eta_2)$ 内の η_1, η_2 を入れ替えたものである。そして、(4.21),(4.22),(4.23),(4.24) 式を (4.20) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
P^{(2)} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r(\eta_1 - \eta_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \left(1 + r\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^4 (1 + \Delta(\eta_1, \eta_2))} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r(\eta_2 - \eta_1)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \left(1 + r\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^4 (1 + \Delta(\eta_2, \eta_1))} \right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

となる。(4.25) 式が $N = 2$ のときの個別測定 (適応法) による識別成功確率である。 $N = 3$ 以降も一つ一つの測定結果を見ていき (η_1, η_2) を計算することにより識別成功確率を求めることは可能だが、計算に必要な (η_1, η_2) が N が 1 個増えるごとに倍になり、複雑化するため一般化した簡単な式で表すことが難しい。したがって漸化式を用いて qubit が N 個のときの識別成功確率 $P^{(N)}$ を表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
P^{(N)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r(\eta_1 - \eta_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) P^{(N-1)}(\eta'_1, \eta'_2) \\
&+ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r(\eta_2 - \eta_1)}{\sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) P^{(N-1)}(\eta''_1, \eta''_2)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

ここでの $\eta'_1, \eta'_2, \eta''_1, \eta''_2$ は (4.15),(4.17),(4.18),(4.19) 式から求めることができる。

4.4 識別成功確率の比較

ノイズがある場合での個別測定 (多数決法) と個別測定 (適応法) のそれぞれの式をプログラムで表し、実際に数値を与えて求めた識別成功確率の値を比較する。

まず、ノイズを大きくしたときの識別成功確率がどうなるのかを見るため、 $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$, $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.6$ とし、 r を 1.00 から 0.90 まで変化させたときのそれぞれの測定方法での識別成功確率の値を図 4.3, 4.4, 4.5 に示す。

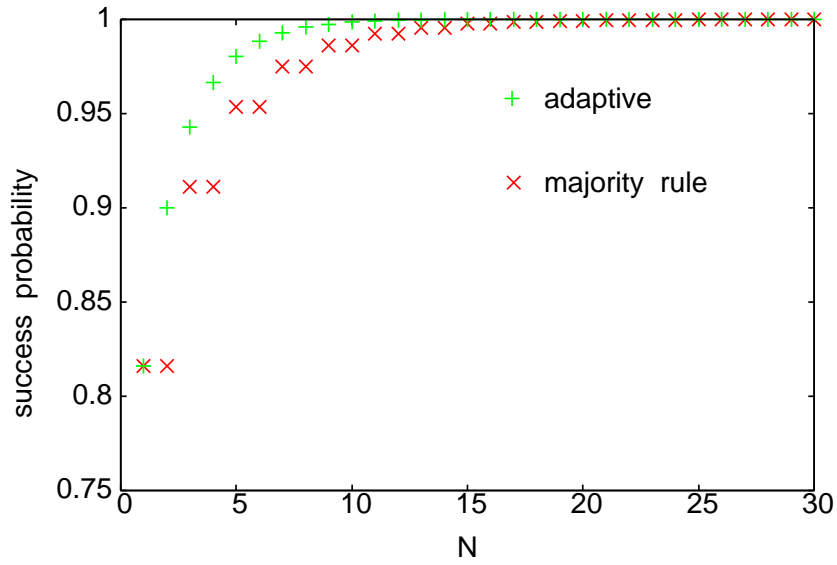


図 4.3: $r = 1.00$ のとき (ノイズ無し)

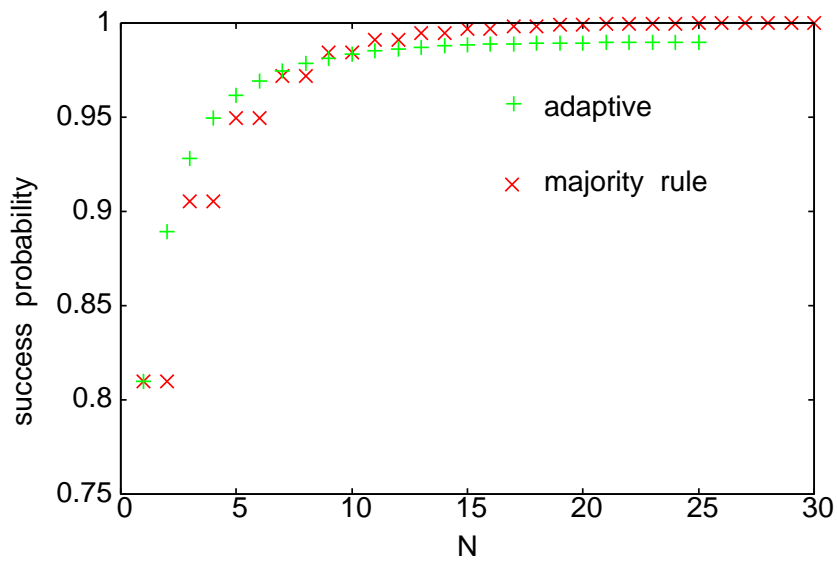


図 4.4: $r = 0.98$ のとき

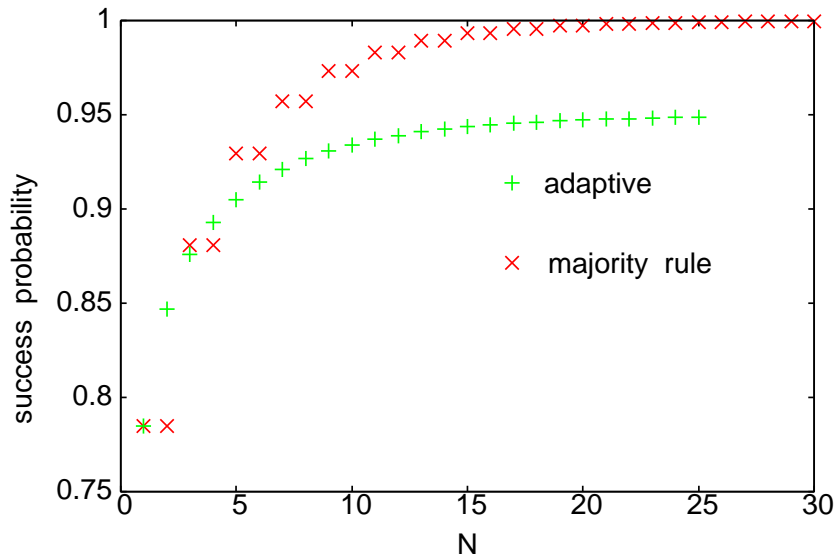


図 4.5: $r = 0.90$ のとき

まず、 $r = 1.00$ のときはノイズが無い場合なので第 3 章で確認したように個別測定 (適応法) が個別測定 (多数決法) よりも識別成功確率が高くなっている。次にノイズがある $r = 0.98$ の場合を見ると、個別測定 (適応法)、個別測定 (多数決法) とともに識別成功確率が低くなっているが、qubit の個数 N が増えるにしたがって個別測定 (適応法) の識別成功確率よりも個別測定 (多数決法) の識別成功確率が高くなっていることが確認できる。そしてノイズをさらに大きくした $r = 0.90$ のグラフをみると個別測定 (適応法) の識別成功確率はさらに低くなり qubit の個数が少ない段階で個別測定 (多数決法) と識別成功確率が逆転していることが分かる。したがって、この比較から個別測定 (適応法) は個別測定 (多数決法) よりもノイズの影響を大きく受けるといえる。

次に、ノイズを $r = 0.98$ で固定し $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ を変化させたときの識別成功確率の値を図 4.6, 4.7, 4.8 に示す。

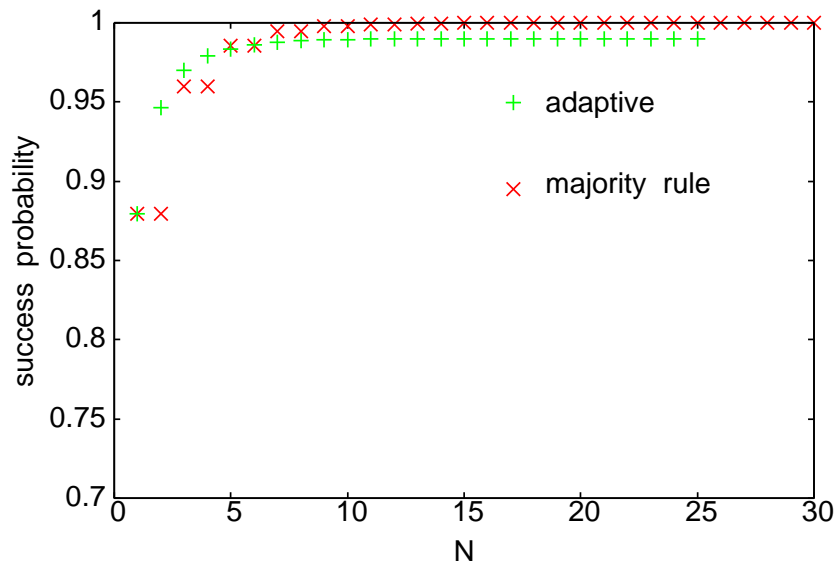


図 4.6: $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.4$ のとき

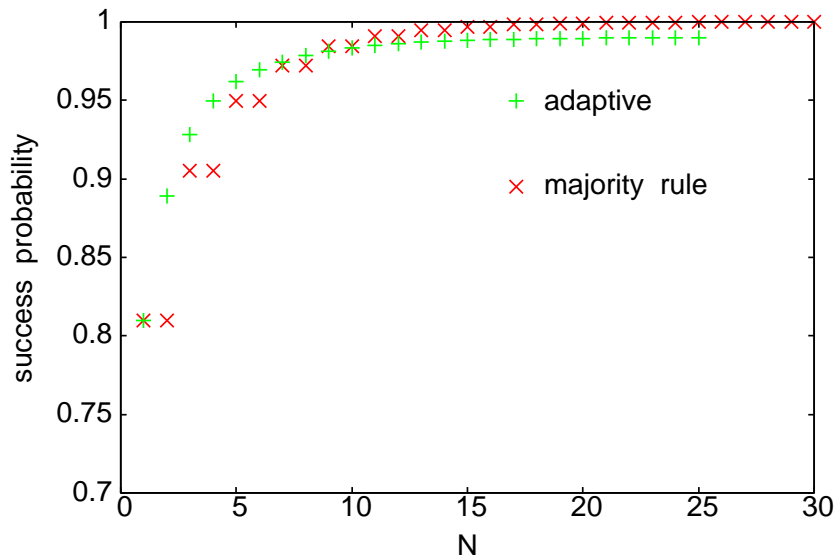


図 4.7: $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.6$ のとき

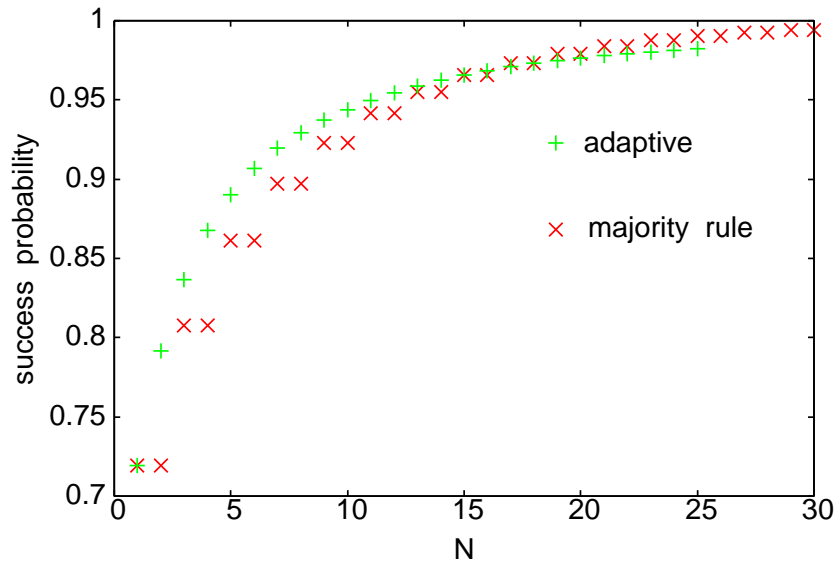


図 4.8: $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.8$ のとき

この比較では、まず $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.4$ のときの識別成功確率は全体的に高くなっていることが確認できる。そして qubit の個数 N が少ない段階で個別測定 (多数決法) が個別測定 (適応法) よりも識別成功確率が上がっていることが分かる。しかし $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ を大きくすると両測定とも全体的に識別成功確率が下がり、個別測定 (適応法) と個別測定 (多数決法) の大小が入れ替わるときの qubit の個数 N が増えていることが確認できる。

第5章 まとめ

5.1 結論

本研究では量子状態の識別で用いる個別測定 (多数決法)、個別測定 (適応法) におけるノイズの影響を調べることを目的とし、それぞれの測定方法での識別成功確率の比較を行った。

ノイズの影響を調べる前にノイズが無い場合で qubit の個数を増やしていったときに識別成功確率がどのように変化するかを知る必要があったため、それぞれの測定方法で識別成功確率の比較を行ったところ、優れた測定方法である集団測定と個別測定 (適応法) での識別成功確率が一致することが分かり、個別測定 (適応法) と個別測定 (多数決法) での比較では個別測定 (多数決法) の識別成功確率が劣るということが確認できた。したがってノイズが存在しない場合では個別測定 (適応法) を用いることが有効であるといえる。

次に本研究の目的であるノイズの影響を調べるため、準備される状態にノイズがある場合を想定し個別測定 (多数決法) と個別測定 (適応法) で識別成功確率の比較を行ったところ、 $r = 0.98$ とノイズが存在する場合には qubit の個数を増やしていくと多数決法と適応法で識別成功確率の大小が逆転し、個別測定 (多数決法) の識別成功確率が個別測定 (適応法) よりも高くなることが確認された。そして、さらにノイズを大きくし $r = 0.90$ として識別成功確率の比較を行ったところ、qubit の個数が少ない段階で大小が逆転することが分かった。この結果から個別測定 (適応法) は個別測定 (多数決法) に比べノイズの影響を大きく受けるといえることが分かる。ノイズの影響を大きく受ける原因としてあげられるのは、個別測定 (適応法) は前の測定結果から次の測定に用いる正規直交基底 $\{|m\rangle, |-m\rangle\}$ を変更するため前の測定結果がノイズの影響で間違っていた場合その結果を反映して次の測定を行ってしまうため、識別成功確率が悪くなると考えられる。一方、個別測定 (多数決法) はノイズの影響はあるものの qubit 個々に対する測定は変わらないので個別測定 (適応法) よりもノイズの影響が少ないと考えられる。したがってノイズが存在する場合には個別測定 (多数決法) を用いることが有効であると考えられる。

次に $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ を変化させたら識別成功確率はどうなるかを検証するため $r = 0.98$ の場合に $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ を変化させ比較を行ったところ $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ が 0.4 と小さいときには多数決法と適応法の識別成功確率の大小関係に変化は見られないが、 $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ を 0.8 のように大きくするとノイズが存在する場合においても適応法が多数決法よりも大きくなることが確認された。しかし、これはノイズが大きい (r が小さい) 場合には $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2$ を大きくしても識別成功確率の大小は逆転しないので注意が必要である。これに関してはさらに詳しい検証が必要である。

5.2 今後の課題

本研究を開始した当初の予定では集団測定におけるノイズの影響も調べ、個別測定と比較する予定であったが集団測定ではノイズ存在時における識別成功確率を求めることができなかつたため、比較を行わなかつた。したがってノイズがある場合での集団測定による識別成功確率を求めることが課題の1つとしてあげられる。

次に、今回用いた個別測定(多数決法)の式は最初に $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ が同確率で与えられる場合に最適となる形となっているため $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ が同確率でないときには式を変更する必要があると考えられる。したがって $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ が同確率でないときでも最適となるように個別測定(多数決法)を改良することが課題である。

最後に、今回の研究結果を材料としノイズ影響下における最適な測定方法を作り出すことが大きな課題である。

参考文献

- [1] B.L. Higgins, B.M. Booth, A.C. Doherty, S.D. Bartlett, H.M. Wiseman, and G.J. Pryde, Mixed State Discrimination Using Optimal Control, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 220503 (2009)

- [2] 竹内繁樹：量子コンピュータ - 超並列計算のからくり (講談社, 2005)

- [3] 砂川重信：量子力学の考え方 (岩波書店, 1993)

- [4] 林明久：量子情報理論 - 東北大学大学院情報科学研究科 集中講義ノート (2008)

謝辞

本研究を行うにあたり、原子核理論研究室の林明久先生には終始丁寧なご指導をしていただいたことに深く感謝し、お礼申し上げます。また鈴木敏男先生、田島直樹先生にも本研究及び日常的なことにおいても、実に丁寧な指導、お世話をしていただき、誠に有難うございました。また、大学院博士前期課程の杉本宏行氏にも多くの助言を頂き深く感謝しております。

本研究に対してご意見をいただいた、多くの物理工学科の先生方にもお礼申し上げ、謝辞の言葉とさせていただきます。