

卒業論文発表会

1月27日, 2010, 福井大学工学部物理工学科

# ノイズがある場合の 量子状態の識別

物理工学科 若林隼吾

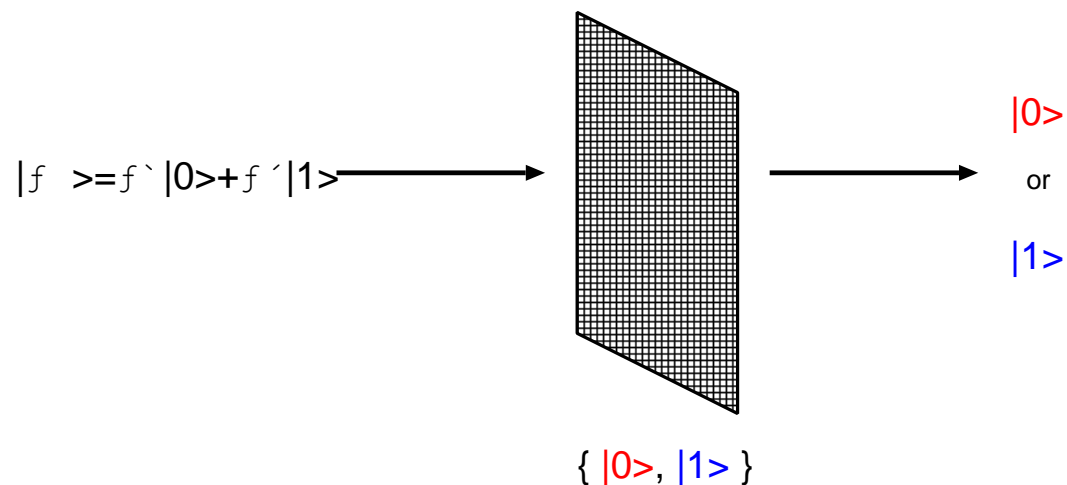
## 重ね合わせの原理

- 量子ビット (qubit) は  $|0\rangle, |1\rangle$  の状態だけでなく、**重ね合わせの状態**をとる

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

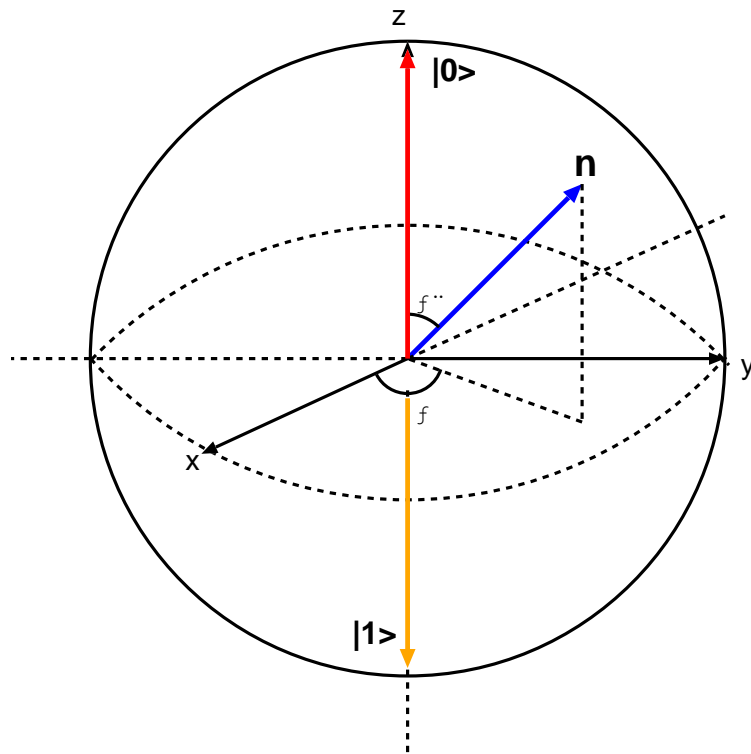
$\alpha$  と  $\beta$  は複素数 ( $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ )

状態  $|\phi\rangle$  を正規直交基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で測定したらどうなるか？



状態は確率  $|\alpha|^2$  で  $|0\rangle$ , 確率  $|\beta|^2$  で  $|1\rangle$  となり、状態は壊れる

## Bloch 球



量子ビットの状態を球面上の一点で表すことができる

$\mathbf{n}$  : Bloch ベクトル

$$|\mathbf{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

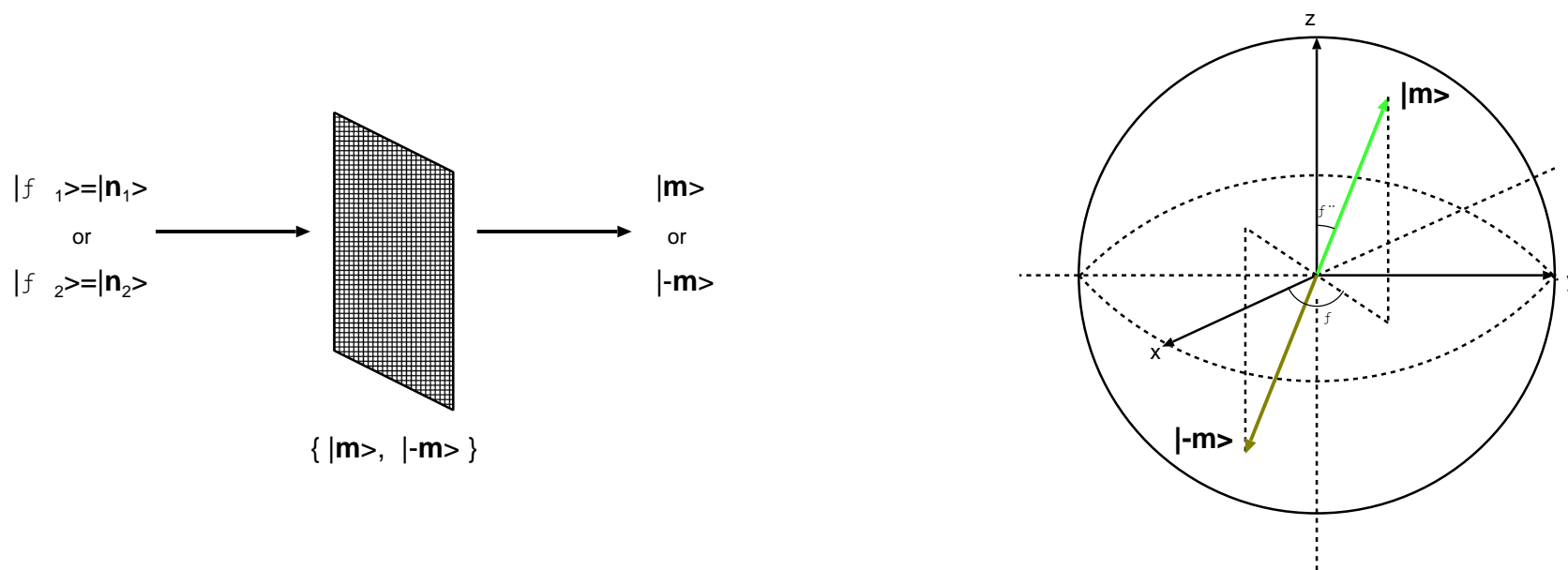
$$(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

## qubitが1個の場合

確率 $\eta_1$ であたえられる状態 $|\phi_1\rangle = |\mathbf{n}_1\rangle$ と

確率 $\eta_2$ であたえられる状態 $|\phi_2\rangle = |\mathbf{n}_2\rangle$ があり、この2つを識別したい

- qubitを正規直交基底 $\{|\mathbf{m}\rangle, |-\mathbf{m}\rangle\}$ で測定する。



- 測定結果が $|\mathbf{m}\rangle$ なら $|\phi_1\rangle$ ,  $|-\mathbf{m}\rangle$ なら $|\phi_2\rangle$ であると決める

qubitが1個のときに状態の識別が成功する確率は

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \eta_1 |\langle \mathbf{m} | \phi_1 \rangle|^2 + \eta_2 |\langle -\mathbf{m} | \phi_2 \rangle|^2 \\ &= \eta_1 \frac{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_1}{2} + \eta_2 \frac{1 + (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_2)}{2} \end{aligned}$$

このときに確率を最大にする  $\mathbf{m}$  は

$$\mathbf{m} = \frac{\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2}{|\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2|}$$

最大識別成功確率は

$$P^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}}{2}$$

## qubitがN個の場合

確率 $\eta_1$ で $\underbrace{|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle\cdots}_{N\text{個}}$ , または確率 $\eta_2$ で $\underbrace{|\phi_2\rangle|\phi_2\rangle|\phi_2\rangle\cdots}_{N\text{個}}$  あたえられる場合

- qubitを1つ1つ個別に測定する **個別測定**
- qubit全体を1つの系とみなし測定する **集団測定**

集団測定が優れている  $\Rightarrow$  個別測定ではどうか？

- qubitを個別に測定し、多く出た方の状態であると推論する多数決を用いる方法 ( **個別測定 多数決法** )
- qubitを個別に測定し、前の測定結果の情報から $\eta_1, \eta_2$ を変更し、あらたな $\{ |m\rangle, |-m\rangle \}$ で測定する方法 ( **個別測定 適応法** )

## 個別測定(多数決法)での識別成功確率

Nが奇数のとき

$$P^{(N)} = \eta_1 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} N C_{N-k} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left( \frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \\ + \eta_2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} N C_{N-k} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left( \frac{1}{2} - \frac{1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k$$

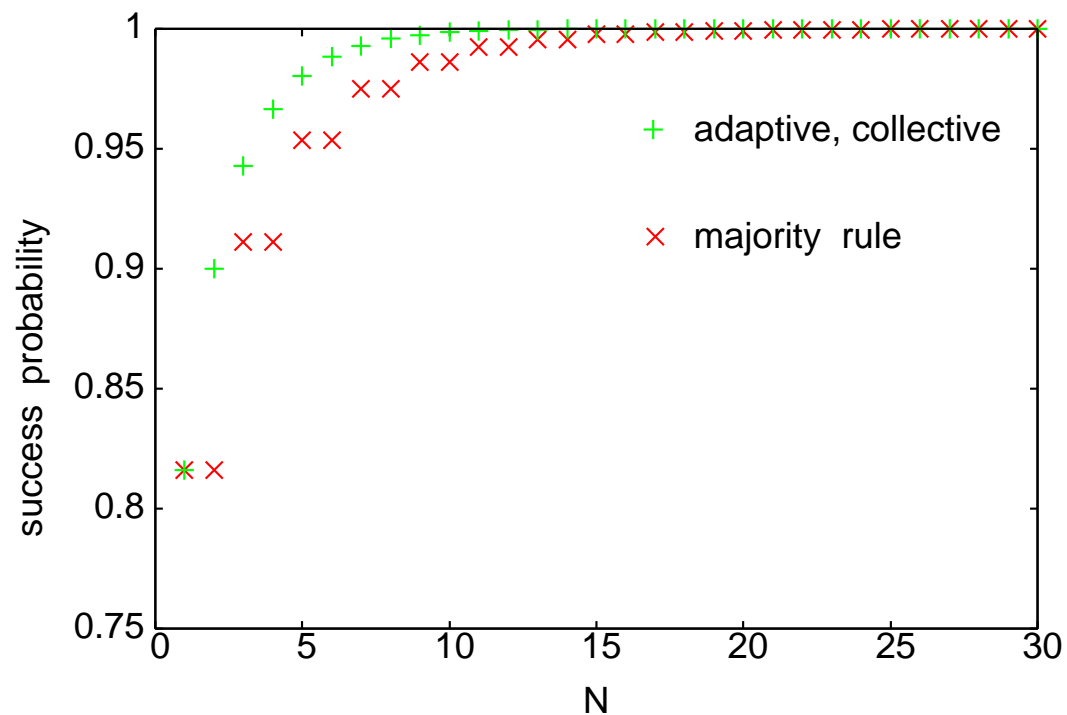
## 個別測定(適応法), 集団測定での識別成功確率

$$P^{(N)} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^{2N}}}{2}$$

個別測定(適応法)は集団測定と識別成功確率が**一致**

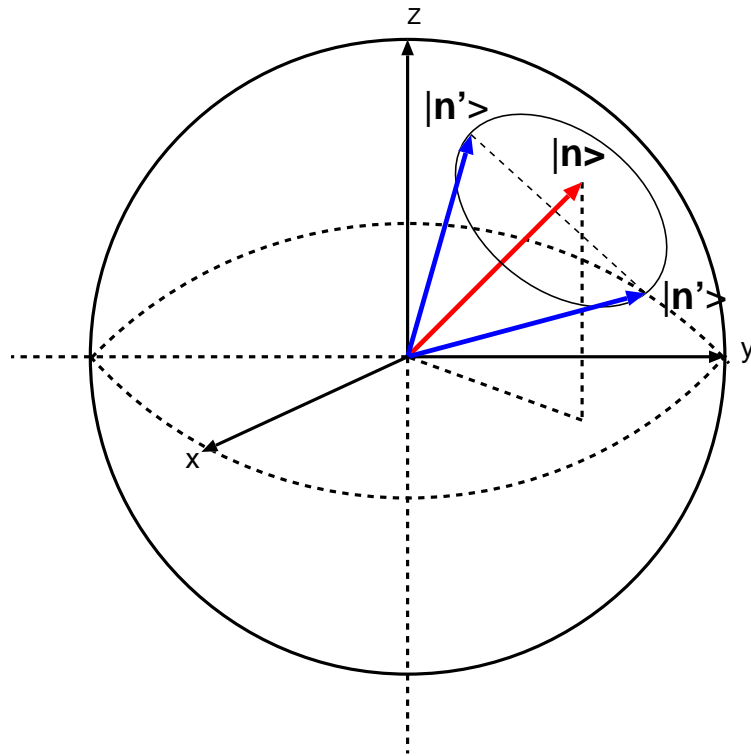


$\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ ,  $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.6$  としたときの識別成功確率



個別測定 (多数決法) は個別測定 (適応法) と比べると識別成功確率は劣る

## 測定する状態にノイズがある場合



ノイズがある場合の状態  $n'$  は  
 $n$  のまわりに分布

$$\langle n' \rangle = rn$$

ただし  $0 < r \leq 1$  ( $r = 1$  はノイズが無い状態)

## qubitが1個の場合（ノイズが存在）

qubitが1個のときの識別成功確率は

$$P(1) = \frac{1+r\sqrt{1-4\eta_1\eta_2|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2}}{2}$$

## qubitがN個の場合（ノイズが存在）

確率 $\eta_1$ で $\underbrace{|\phi'_1\rangle|\phi''_1\rangle|\phi'''_1\rangle\cdots}_{N\text{個}}$ , または確率 $\eta_2$ で $\underbrace{|\phi'_2\rangle|\phi''_2\rangle|\phi'''_2\rangle\cdots}_{N\text{個}}$  あたえられる場合

⇒ 個別測定（多数決法）, 個別測定（適応法）で識別成功確率を求める.

## 個別測定(多数決法)での識別成功確率

$$P^{(N)} = \eta_1 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} N C_{N-k} \left( \frac{1}{2} + \frac{r(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left( \frac{1}{2} - \frac{r(1 - 2\eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k \\ + \eta_2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} N C_{N-k} \left( \frac{1}{2} + \frac{r(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^{N-k} \left( \frac{1}{2} - \frac{r(1 - 2\eta_1 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2)}{2 \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right)^k$$

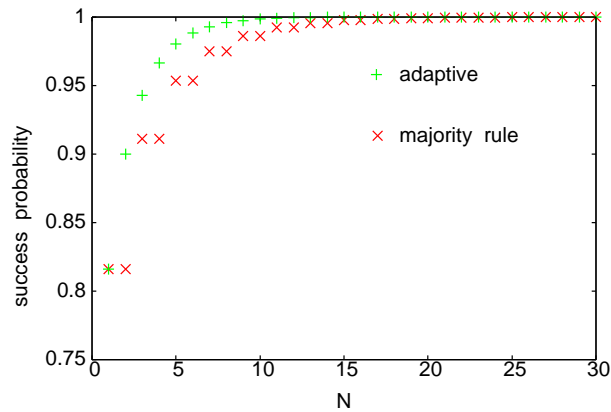
## 個別測定(適応法)での識別成功確率

$$P^{(N)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r(\eta_1 - \eta_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) P^{(N-1)}(\eta'_1, \eta'_2) \\ + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r(\eta_2 - \eta_1)}{\sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) P^{(N-1)}(\eta''_1, \eta''_2)$$

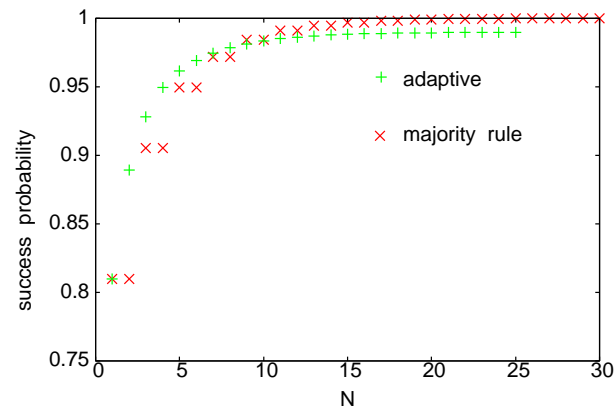
$(\eta'_1, \eta'_2), (\eta''_1, \eta''_2)$  は前の測定結果の情報から  $\eta_1, \eta_2$  を変更したものの

## 多数決法と適応法の比較 (ノイズを大きくする)

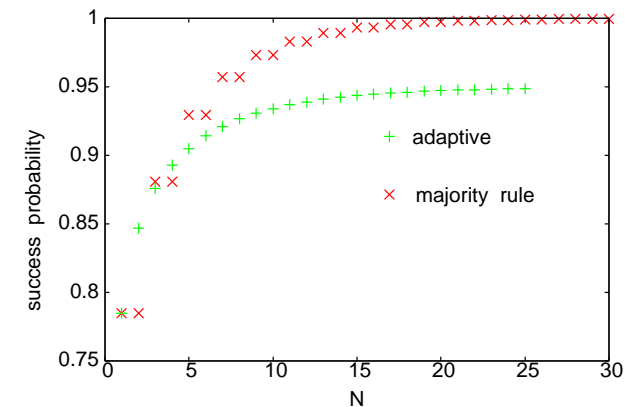
$$\eta_1 = \eta_2 = 0.5, |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 = 0.6$$



$r = 1.00$  (ノイズなし)



$r = 0.98$



$r = 0.90$

ノイズが大きくなると適応法が多数決法よりも識別成功確率が悪くなる

## まとめ

- 個別測定（**適応法**）は個別測定（**多数決法**）に比べ、ノイズの影響を大きく受けることが分かった。

- ノイズが存在しない場合  
⇒ 個別測定（**適応法**）で状態の識別
- ノイズが存在する場合  
⇒ 個別測定（**多数決法**）での識別が有効

## 今後の課題

- 個別測定（多数決法）の改良
- 集団測定におけるノイズの影響
- ノイズがあるときの最適な測定