

スピン相互作用による エンタングルメントの生成

2010年2月

福井大学 工学部 物理工学科
谷中 裕太

目次

第1章	はじめに	2
第2章	qubit	3
2.1	重ね合わせの原理	3
2.2	測定は確率的であり状態を壊す	3
2.3	不確定性原理	3
第3章	エンタングルメント	5
3.1	エンタングルメントについて	5
3.2	量子テレポーテーション	5
3.3	量子擬テレパシー	6
3.4	超高密度符号化 -Super Dense Coding-	8
第4章	スピン	9
4.1	スピンの合成	9
4.2	パウリ行列	10
第5章	スピンを持つ粒子の散乱	12
5.1	一次元箱型ポテンシャル	12
5.2	一次元 関数ポテンシャル	16
5.3	2粒子スピンでの散乱	18
5.4	3粒子スピンでの散乱	19
第6章	エンタングルメントの生成	22
6.1	初期状態 $ -1 \rangle 1 \rangle 1 \rangle$	22
6.2	スピン状態 $ -1 \rangle$ の粒子を2回入射	24
6.3	高確率でエンタングルメントを生成	25
第7章	まとめ	27
7.1	結論	27
7.2	今後の課題	27
	参考文献	28
	謝辞	29

第1章 はじめに

古典力学と量子力学の大きな違いは、量子力学には不確定性原理があるという事だ。他に量子力学では状態の重ね合わせや測定の統計性など、古典力学にはない性質がある。これらの性質を積極的に情報処理に利用するのが量子情報という分野である。量子系の最小単位として qubit というものを用いる。量子情報論には量子暗号などがある。量子暗号とは A さん B さんが遠く離れている場合の秘密鍵の共有方法で、Quantum tomography(qubit が無限個あれば測定により状態を決定できる)や No-cloning theorem (未知の状態をコピーすることはできない) といった性質を利用する事で成立する。

部分系に対する 2 つの測定が絡み合っている状態、「量子の纏れ」をエンタングルメントと言う。エンタングルメントは、量子テレポーションなどの量子情報の通信に必要不可欠であることがわかっている。量子テレポーションとは、エンタングルした 2 つの qubit を使い、自分がエンタングルした qubit と送りたい未知の状態の qubit に Bell 測定を行い、その測定結果である古典的情報を伝える。相手は相手の持っているエンタングルした qubit に、教えてもらった古典的情報に依存するユニタリー変換を行う。すると自分側にあった、未知の qubit が相手側にレポートするというものだ。

本研究ではそのエンタングルメントをどれだけ生成できるかを見ていく。現在、量子エンタングルメントの作成方法としては、SPDC(Spontaneous Parametric Down Conversion) 法があり、レーザーを非線形光学結晶に照射して、偏光がエンタングルした 2 光子の対を発生させるという方法が一般的である。しかし、生成できる確率が小さかった。そこで今回、エンタングルメントを生成する方法としてあげられる、「スピンを持つ 3 粒子によりエンタングルメントの生成をする」という方法について考察していく。

固定した 2 つの粒子に別の粒子を入射する事で、スピンの相互作用により、固定した 2 つの粒子のスピン状態がエンタングルする。本研究ではこの 3 粒子の散乱を一次元箱型ポテンシャル問題から、一次元 関数ポテンシャル、2 粒子スピンの散乱、3 粒子スピンの散乱と順を追って計算していく。そして、実際に初期状態を与え、透過後、反射後の状態がどのようになっているかを見る。この時、エンタングルメントが生成できる確率も見ていく。

第2章 qubit

量子情報理論を考える上で、量子系の最小単位である qubit は非常に重要である。qubit は、基本的な2つの状態を持ち、今回重要になってくるスピンも qubit である。qubit は古典論でのビットとは違った性質を持っている。まず、この qubit の性質について説明する。

2.1 重ね合わせの原理

古典論でのビットは $|0\rangle$ か $|1\rangle$ か、どちらかの状態しかとることしかできない。しかし、qubit では $|0\rangle, |1\rangle$ だけではなく、この2つの状態を重ね合わせた状態をとることが可能である。例として (2.1) の様な状態をあげておく。

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

α, β は複素数で、(2.2) の条件の様に規格化されている。

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.2)$$

2.2 測定は確率的であり状態を壊す

わかりやすくするために、qubit を偏光として見ていこう。 $||\rangle$ が垂直偏光、 $|-\rangle$ が水平偏光である。測定前の状態が (2.3) のような重ね合わせの状態とする。

$$|\setminus\rangle = \alpha||\rangle + \beta|-\rangle \quad (2.3)$$

垂直偏光と水平偏光を分離する測定器を考える。 $|\setminus\rangle$ を測定器で測ると、確率 $|\alpha|^2$ で $||\rangle$ になり、確率 $|\beta|^2$ で $|-\rangle$ に分離される。測定後の状態が垂直偏光 $||\rangle$ と水平偏光 $|-\rangle$ となっており、最初の重ね合わせの状態は壊れてしまった。すなわち、「測定は確率的で状態を壊す」。

2.3 不確定性原理

垂直偏光 $||\rangle$ を垂直偏光と水平偏光を分離する測定器で測定すると、100%の確率で測定後の状態が垂直偏光であることが確定している。このとき、測定器の角度を θ 傾けると、 $|\setminus\rangle_\theta$ の偏光と、 $|\setminus\rangle_{\theta+\frac{\pi}{2}}$ の偏光に分離する測定器になる。この測定器を使い

垂直偏光 $||\rangle$ を測定すると、確率 $\cos^2\theta$ で測定後の状態が $|\ \rangle_\theta$ となり、確率 $\sin^2\theta$ で測定後の状態が $|\ \rangle_{\theta+\frac{\pi}{2}}$ となり測定結果は確定しない。一般に、2つの異なる正規直交基底による測定では両方の測定結果が確定することはない。これを「不確定性原理」と言う。

第3章 エンタングルメント

エンタングルメントは、量子情報の通信に必要不可欠である。この重要なエンタングルメントについてと、エンタングルメントを応用した量子テレポーテーション、量子擬テレパシー、Super Dense Coding について説明する。

3.1 エンタングルメントについて

$$|\phi\rangle_{\text{III}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{\text{I}}|0\rangle_{\text{II}} + |1\rangle_{\text{I}}|1\rangle_{\text{II}}) \quad (3.1)$$

(3.1) の様な状態で表される 2 つの qubit I と qubit II を考えよう。ここで、次のような条件を与える。

- ・ A さんと B さんはお互いに遠くに離れている。(例えば、福井とロンドン)
- ・ A さんが qubit I を、B さんが qubit II を持っている。

この時、に A さんと B さんがそれぞれ自分の qubit に対し基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で測定したとする。すると、A さんの測定結果が $|0\rangle$ ならば遠くはなれた B さんの測定結果も $|0\rangle$ となる。同様に A さんが $|1\rangle$ ならば B さんも $|1\rangle$ となる。部分系に対する測定結果がつながっている。この様な状態を「エンタングルメントした状態」または「アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン対 (EPR pair)」と言う。

3.2 量子テレポーテーション

$$|\Psi\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_a|0\rangle_b + |1\rangle_a|1\rangle_b) \quad (3.2)$$

A さんと B さんが、エンタングルメントした状態の qubit a と qubit b を持って遠く離れる。A さんに未知の qubit c が与えられる。この qubit c を B さんにテレポートしたい。

$$|\phi\rangle_c = \alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c \quad (3.3)$$

c が与えられた後の 3 つの qubit の状態が次の様になる。

$$|\Phi\rangle_{cab} = |\phi\rangle_c |\Psi\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c) (|0\rangle_a|0\rangle_b + |1\rangle_a|1\rangle_b) \quad (3.4)$$

(3.4) を qubit a と qubit c に関して Bell 基底で書き直す。Bell 基底は次の様に表される。

$$\begin{cases} |\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \\ |\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \\ |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \\ |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) \end{cases} \quad (3.5)$$

(3.4) を書き直すと。

$$|\Phi\rangle_{cab} = \frac{1}{2} \left(|\Phi_1\rangle_{ca} (\alpha|0\rangle_b + \beta|1\rangle_b) + |\Phi_2\rangle_{ca} (\alpha|0\rangle_b - \beta|1\rangle_b) \right. \\ \left. + |\Phi_3\rangle_{ca} (\alpha|1\rangle_b + \beta|0\rangle_b) + |\Phi_4\rangle_{ca} (\alpha|1\rangle_b - \beta|0\rangle_b) \right) \quad (3.6)$$

これを Bell 基底で測定すると、(3.6) から測定結果 $r = \{1, 2, 3, 4\}$ はすべて $\frac{1}{4}$ の確率で起こる事がわかる。測定後の B さんの持っている qubit b は次の様になる。

$$\begin{cases} r = 1 \text{ の時} & \alpha|0\rangle_b + \beta|1\rangle_b \\ r = 2 \text{ の時} & \alpha|0\rangle_b - \beta|1\rangle_b \\ r = 3 \text{ の時} & \alpha|1\rangle_b + \beta|0\rangle_b \\ r = 4 \text{ の時} & \alpha|1\rangle_b - \beta|0\rangle_b \end{cases}$$

ここで A さんが B さんに測定結果 $r = \{1, 2, 3, 4\}$ (2bit) を伝える。そして B さんが qubit b に対して測定結果に依存するユニタリー変換を行うと、qubit b の状態が (3.3) と同じになる。

$$\begin{cases} r = 1 \text{ の時} & U_1 = 1 \quad (\text{何もしない}) \\ r = 2 \text{ の時} & U_2 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad (|1\rangle \text{ の位相を反転する}) \\ r = 3 \text{ の時} & U_3 = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \quad (0 \text{ と } 1 \text{ を交換する}) \\ r = 4 \text{ の時} & U_4 = U_2 U_3 \end{cases}$$

これで、A さんの持っていた未知の qubit c が B さんの所にテレポートされた。この時、A さんの持っていた qubit c の状態は壊れている。

3.3 量子擬テレパシー

A さんと B さんが協力するゲームを考える。A さんと B さんはエンタングルした状態の qubit をそれぞれ持っている。C さんが $x = 0, 1, 2$, $y = 0, 1, 2$ をランダムに選び、A さんに x を、B さんに y を渡す。A さんと B さんは自分の数字を見て $a = 0 \text{ or } 1, b = 0 \text{ or } 1$ (2bit) を宣言する。 $x = y$ の時は $a = b$ 、 $x \neq y$ の時は $a \neq b$ なら A と B の勝ちとなる。まず、古典的に考える為に宣言 a, b を次の様に決めておく。

$$\begin{array}{ccc} x=0 & 1 & 2 \\ & \downarrow \downarrow \downarrow & \\ a=0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y=0 & 1 & 2 \\ & \downarrow \downarrow \downarrow & \\ b=0 & 1 & 1 \end{array}$$

古典的な考えで AさんとBさんが勝てる確率 $P_{\text{classical}}$ は

$$P_{\text{classical}} = \frac{7}{9}$$

となる。これは最適な古典的戦略である。

これより、AさんとBさんがエンタングルした2つの qubit を1つずつ持っている時の確率を考えていく。まず、エンタングルした2つの qubit の状態が

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \quad (3.7)$$

となる。AさんとBさんはもらった x, y に応じて次の様なユニタリー変換を行う。

$$\begin{aligned} \text{Aさん: } & |0\rangle \rightarrow |0\rangle, |1\rangle \rightarrow e^{ix\theta}|1\rangle \\ \text{Bさん: } & |0\rangle \rightarrow |0\rangle, |1\rangle \rightarrow e^{-iy\theta}|1\rangle \end{aligned}$$

すると2つの qubit の状態が次の様になる。

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + e^{i\theta(x-y)}|1\rangle|1\rangle) \quad (3.8)$$

次に、AさんとBさんは自分の qubit に Hadamard 変換を行う。

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned}$$

すると、2つの qubit の状態が次の様になる。

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + e^{i\theta(x-y)}) (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) + (1 - e^{i\theta(x-y)}) (|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \right) \quad (3.9)$$

ここで、AさんBさんがそれぞれ自分の qubit の状態を基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で測定する。その測定結果を a, b として宣言する。まず $x = y$ の時を見ると、2つの qubit の状態が

$$|\Phi\rangle_{x=y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$$

となり、宣言 a, b が $a=b$ となり 100%の確率でAさんBさんの勝ちになることがわかる。次に $|x - y| = 1$ の時を見ると、2つの qubit の状態が

$$|\Phi\rangle_{|x-y|=1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + e^{i\theta}) (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) + (1 - e^{i\theta}) (|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \right)$$

となる。この時測定結果を宣言 a, b として使うので後ろの項の係数の絶対値2乗が勝つ確率となる。

$$2 \left| \frac{(1 - e^{i\theta})}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

次に $|x - y| = 2$ の時を見ると、先ほどの e の肩が 2 倍されるだけなので

$$2 \left| \frac{(1 - e^{2i\theta})}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

となる。 x, y のとり得る場合が 9 通りである。そのうち $x = y$ が 3 通り、 $|x - y| = 1$ が 4 通り、 $|x - y| = 2$ が 2 通りなので勝てる確率が

$$\begin{aligned} P_{\text{quantum}} &= \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \frac{1 - \cos\theta}{2} + \frac{2}{9} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{9} (6 - 2\cos\theta - \cos 2\theta) = \frac{5}{6} \quad \left(\theta = \frac{2\pi}{3} \right) \\ P_{\text{quantum}} &= \frac{5}{6} > \frac{7}{9} = P_{\text{classical}} \end{aligned}$$

となり、最適な古典的戦略に勝る事がわかる。まるで A さんと B さんがテレパシーを使ったかの様である。

3.4 超高密度符号化 -Super Dense Coding-

$$|\Psi\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_a |0\rangle_b + |1\rangle_a |1\rangle_b) \quad (3.10)$$

A さんと B さんが、エンタングルメントした状態の qubit a と qubit b を持っている。A さんと B さんは遠く離れていて、A さんは B さんに 2bit の古典情報 $r = \{1, 2, 3, 4\}$ を相手に送りたい。そこで A さんは自分の qubit a にユニタリ変換 U_r を行うと

$$|\Psi\rangle'_{ab} = (U_r \otimes 1) |\Psi\rangle_{ab} = |\Phi_r\rangle_{ab} \quad (3.11)$$

となり、 $|\Phi_r\rangle$ は Bell 基底である事がわかる。ここで A さんは B さんに qubit a を送る。B さんはもらった qubit a と自分の qubit b に対して Bell 基底で測定を行う。すると、測定結果が A さんの伝えたい古典情報 r となり、A さんから B さんに 2bit 古典情報が伝わった事になる。

第4章 スピン

上向きスピンと下向きスピンの2つの基本的状態を持つスピンも qubit である。これより、上向きスピンを $|1\rangle$ 、下向きスピンを $|-1\rangle$ と表記していく。本研究では3粒子のスピンを考えるので、3粒子スピンの合成をまず説明する。また、パウリ行列の内積の形のハイゼンベルグ型のスピン相互作用を考えるので、パウリ行列や、そのスピン相互作用の計算などを説明していく。

4.1 スピンの合成

これより、 $s = \frac{1}{2}$ の粒子に I, II, III と名前を付ける。

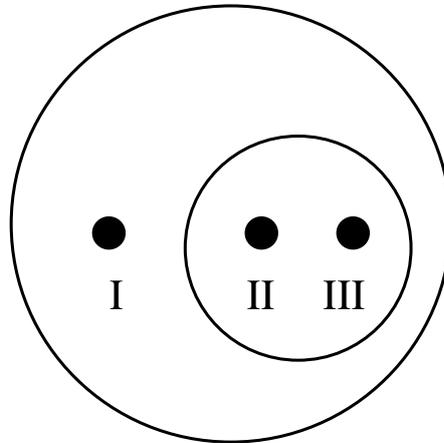


図 4.1: 3 粒子スピンの合成順序

3 粒子スピンの合成を見るのだが、3 粒子スピンを合成した時の状態に関わってくるので粒子 II と粒子 III の 2 粒子のスピンを先に見ていく。

(i) 2 粒子スピンの合成

$$\begin{cases} S_{\text{IIIII}} = 1 \text{ の時、} S_{z\text{IIIII}} = 1, 0, -1 \\ S_{\text{IIIII}} = 0 \text{ の時、} S_{z\text{IIIII}} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$S = 1$ の 3 通りを三重項 (Triplet)、 $S = 0$ の 1 通りを一重項 (singlet) と呼ばれる。この 4 通りの状態は次の様になる。

$$\begin{cases} S_{\text{IIIII}} = 1, S_{z\text{IIIII}} = 1 \text{ の時、} |1\rangle|1\rangle \\ S_{\text{IIIII}} = 1, S_{z\text{IIIII}} = -1 \text{ の時、} |-1\rangle|-1\rangle \\ S_{\text{IIIII}} = 1, S_{z\text{IIIII}} = 0 \text{ の時、} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle) \\ S_{\text{IIIII}} = 0, S_{z\text{IIIII}} = 0 \text{ の時、} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|-1\rangle - |-1\rangle|1\rangle) \end{cases} \quad (4.2)$$

(ii) 3 粒子スピンの合成

$$\begin{cases} S = \frac{3}{2} \text{の時、} S_z = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \\ S = \frac{1}{2}, S_{\text{III}} = 1 \text{の時、} S_z = \pm\frac{1}{2} \\ S = \frac{1}{2}, S_{\text{III}} = 0 \text{の時、} S_z = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

$S = \frac{1}{2}, S_z = \pm\frac{1}{2}$ が 2 種類ある。これは 2 粒子スピンの合成をした時の S_{III} によって区別できる。この 8 通りの状態が次の様になる。この状態を使って行くため、わかりやすく $|S, S_z\rangle |S, S_z, S_{\text{II,III}}\rangle$ の様に置いておく。

$$\begin{cases} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1\rangle|1\rangle|1\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle|1\rangle|-1\rangle + |1\rangle|-1\rangle|1\rangle + |-1\rangle|1\rangle|1\rangle) \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle|-1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|-1\rangle|1\rangle) \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |-1\rangle|-1\rangle|-1\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle(|1\rangle|-1\rangle - |-1\rangle|1\rangle) \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle(|1\rangle|-1\rangle - |-1\rangle|1\rangle) \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-|1\rangle|1\rangle|-1\rangle - |1\rangle|-1\rangle|1\rangle + 2|-1\rangle|1\rangle|1\rangle) \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-|-1\rangle|-1\rangle|1\rangle - |-1\rangle|1\rangle|-1\rangle + 2|1\rangle|-1\rangle|-1\rangle) \end{cases}$$

本研究では、いろいろな 3 粒子スピンの初期状態をこの 8 つの状態で書き直し計算していく。

4.2 パウリ行列

下の様に定義される行列をパウリ行列と言う。

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

それぞれを、up スピン, down スピン状態に作用させると以下の様になる。

$$\begin{aligned} \sigma_x|1\rangle &= |-1\rangle & \sigma_y|1\rangle &= i|-1\rangle & \sigma_z|1\rangle &= |1\rangle \\ \sigma_x|-1\rangle &= |1\rangle & \sigma_y|-1\rangle &= -i|1\rangle & \sigma_z|-1\rangle &= -|-1\rangle \end{aligned}$$

本研究で、ハイゼンベルグ型のスピン相互作用を考える。これがパウリ行列の内積となる。

$$\vec{\sigma}^{\text{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} = (\sigma_x^{\text{I}}\sigma_x^{\text{II}} + \sigma_y^{\text{I}}\sigma_y^{\text{II}} + \sigma_z^{\text{I}}\sigma_z^{\text{II}})$$

粒子に入射する粒子に I、固定する 2 つの粒子に II, III と名前を付ける。その時、粒子 I と II のスピン相互作用と粒子 I と III のスピン相互作用が発生すると考えられる。そこで、 $\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II, \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^III$ を 3 粒子スピンの 8 つの状態に作用させた固有値を計算しておく。

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= (\sigma_x^I \sigma_x^II + \sigma_y^I \sigma_y^II + \sigma_z^I \sigma_z^II) |1\rangle |1\rangle |1\rangle \\
 &= \sigma_x^I \sigma_x^II |1\rangle |1\rangle |1\rangle + \sigma_y^I \sigma_y^II |1\rangle |1\rangle |1\rangle + \sigma_z^I \sigma_z^II |1\rangle |1\rangle |1\rangle \\
 &= (\sigma_x^I |1\rangle \sigma_x^II |1\rangle + \sigma_y^I |1\rangle \sigma_y^II |1\rangle + \sigma_z^I |1\rangle \sigma_z^II |1\rangle) |1\rangle \\
 &= |-1\rangle |-1\rangle |1\rangle + i^2 |-1\rangle |-1\rangle |1\rangle + |1\rangle |1\rangle |1\rangle \\
 &= |1\rangle |1\rangle |1\rangle \\
 &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle
 \end{aligned}$$

上の様に計算できる。同様にすべて計算した結果が下の様になる。

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II \left| \frac{3}{2}, s_z \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, s_z \right\rangle \\
 \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^III \left| \frac{3}{2}, s_z \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, s_z \right\rangle \\
 (\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^III) \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, 0 \right\rangle = 0 \\
 (\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^III) \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, 1 \right\rangle = -4 \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, 1 \right\rangle
 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

(4.4) は初期状態を与えた場合の計算過程で必要になってくる。

第5章 スピンを持つ粒子の散乱

本研究では、スピンを持った3粒子のを散乱させることで、スピン相互作用によりエンタングルを生成する方法について考える。これに関する最近の研究には参考文献の[6]等がある。まず、2粒子での一次元箱型ポテンシャル、一次元関数ポテンシャルでの散乱係数を計算し、一次元箱型ポテンシャルに極限を与えた時に一次元関数ポテンシャルと一致することを確認する。次に2粒子での一次元関数ポテンシャルにスピンを導入し、計算します。そして最後に、本研究での課題である3粒子スピンを使い、散乱させ、エンタングルメント生成に繋げて行く。この過程を順を追って説明していく。

5.1 一次元箱型ポテンシャル

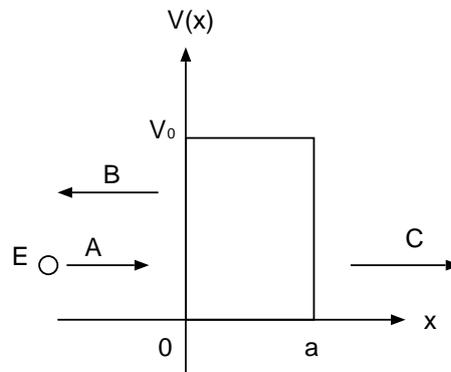


図 5.1: 一次元箱型ポテンシャル

図 5.1 の様な箱型の $0 < E < V_0$ であるポテンシャルにエネルギー E を持った粒子を散乱させる場合を考える。散乱係数をそれぞれ A, B, C 、エネルギーを E 、ポテンシャルを V_0 とおく。 $V(x) = 0$ の領域、 $V(x) = V_0$ の領域と順番に見ていく。

(i) $V(x) = 0$ の領域

シュレディンガー方程式は以下の様に与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} u(x) = Eu(x) \tag{5.1}$$

$u(x)$ は波動関数である。(5.1) より波動関数を求めると。

$$\begin{cases} 0 \leq x \text{ の時、} u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ x \geq a \text{ の時、} u(x) = Ce^{ikx} \end{cases}$$

ここで、 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ は伝播数である。

(ii) $V(x) = V_0$ の領域

シュレディンガー方程式は以下の様に与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} u(x) = (E - V_0)u(x) \quad (5.2)$$

(5.2) より波動関数を求めると。

$$u(x) = Fe^{\beta x} + Ge^{-\beta x}$$

F, G は任意の定数である。伝播数は $\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ で与えられる。

(i)(ii) の境界では波動関数は一致しているはずなので、境界条件として次の式が得られる。

$$A + B = F + G \quad (5.3)$$

$$Ce^{ika} = Fe^{\beta a} + Ge^{-\beta a} \quad (5.4)$$

波動関数を微分したのも一致するはずなので、以下の式が得られる。

$$ik(A - B) = \beta(F - G) \quad (5.5)$$

$$ikCe^{ika} = \beta(Fe^{\beta a} - Ge^{-\beta a}) \quad (5.6)$$

この4つの式を使い F, G を消去し、透過係数 C と反射係数 B を求める。

$1/2 \times (5.3) + 1/2 \times (5.5)$ 、 $1/2 \times (5.3) - 1/2 \times (5.5)$ より

$$F = \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) A + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) B$$

$$G = \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) A + \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) B$$

上の様に F, G が求まる。この F, G を (5.4)、(5.6) に代入すると以下の式が得られる。

$$Ce^{ika} = \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) A + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) Be^{\beta a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) A + \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) Be^{-\beta a} \quad (5.7)$$

$$ikCe^{ika} = \beta \left(\left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) A + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) Be^{\beta a} - \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) A - \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) Be^{-\beta a} \right) \quad (5.8)$$

この (5.7)(5.8) から C を消すと

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) A + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) Be^{\beta a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) A + \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) Be^{-\beta a} \\ &= \frac{\beta}{ik} \left(\left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) A + \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) Be^{\beta a} - \left(\frac{1}{2} - \frac{ik}{2\beta}\right) A - \left(\frac{ik}{2\beta} + \frac{1}{2}\right) Be^{-\beta a} \right) \end{aligned}$$

となる。この両辺を A で割りと、 $\frac{B}{A}$ が以下の様に得られる。

$$\frac{B}{A} = \frac{(k^2 + \beta^2)(1 - e^{-2\beta a})}{(k + i\beta)^2 - (k - i\beta)^2 e^{-2\beta a}} \quad (5.9)$$

(5.7) の両辺を A で割り、(5.9) を代入すると

$$\frac{C}{A} = \frac{4ik\beta e^{-(\beta+ik)a}}{(k + i\beta)^2 - (k - i\beta)^2 e^{-2\beta a}} \quad (5.10)$$

上の様に $\frac{C}{A}$ が得られた。

本研究では簡単の為に $a \rightarrow 0$ の極限を考える。より正確にはポテンシャルの面積 $V_0 a$ を一定とする、以下のような極限を考える (図 5.2)。これは次節で見るとようにポテンシャルが δ 関数を用いて $g\delta(x)$ と表される事に対応する。

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 0 \\ V_0 &\rightarrow \infty \\ V_0 a &= g \end{aligned}$$

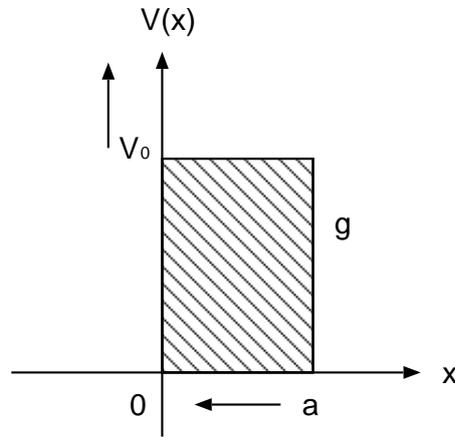


図 5.2: 極限を考える

(5.9) を変形すると

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{k^2}{\beta^2} + 1}{\frac{k^2}{\beta^2} + 2i\frac{k(1+e^{-2\beta a})}{\beta(1-e^{-2\beta a})} - 1} \quad (5.11)$$

(5.11) の様になる。 β に V_0 が含まれるので $\beta \rightarrow \infty$ となる。 βa もどうなるか見ておくと

$$\begin{aligned} \beta a &= a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2ma^2(V_0 - E)}{\hbar^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2m(ga - Ea^2)}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

となり、 $\beta a \rightarrow 0$ となる事がわかる。(5.11)の $\beta(1 - e^{-2\beta a})$ 以外は $\beta \rightarrow \infty$ として計算できるので、 $\beta(1 - e^{-2\beta a})$ だけを見ていく。 $e^{-2\beta a}$ は次の様に近似できる。

$$e^{-2\beta a} = 1 - 2\beta a + 2\beta^2 a^2 \dots \quad (5.12)$$

とりあえず(5.12)の3項目までを $\beta(1 - e^{-2\beta a})$ に代入すると

$$\beta(1 - (1 - 2\beta a + 2\beta^2 a^2)) = 2\beta^2 a - 2\beta^3 a^2 \quad (5.13)$$

となる。(5.13)の1項目をまず見ると

$$\begin{aligned} 2\beta^2 a &= 2a \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \\ &= \frac{4mg}{\hbar^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

となり、定数となる。このことから下の様になる。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{B}{A} = \frac{1}{\frac{ik\hbar^2}{mg} - 1} \quad (5.15)$$

$\frac{C}{A}$ を変形し極限を与えると、同様に下の式が得られる。

$$\frac{C}{A} = \frac{4ik\beta e^{-(\beta+ik)a}}{\frac{k^2}{\beta}(1 - e^{-2\beta a}) + 2ik(1 + e^{-2\beta a}) - \beta(1 - e^{-2\beta a})} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{C}{A} &= \frac{4ik}{4ik - \frac{4mg}{\hbar^2}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{mg}{ik\hbar^2}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

これで一次元箱型ポテンシャルに極限を与えた時の $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ が求まった。

5.2 一次元 関数ポテンシャル

続いて一次元 関数ポテンシャルについて見ていくのだが、まず 関数について説明する。 関数は次のような特徴を持つ。

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \\ \delta(0) = \infty \end{cases} \quad (5.18)$$

$x = 0$ で連続な任意の関数 $f(x)$ に対して次の様な性質を持つ。

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (5.19)$$

以下では、ポテンシャルを $g\delta(x)$ とする散乱問題を解き、前節の極限操作で得られた結果と一致することを示す。

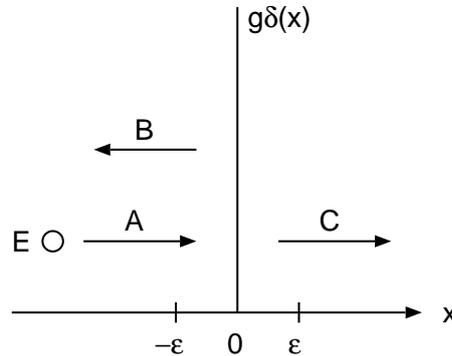


図 5.3: 一次元 関数ポテンシャル

シュレディンガー方程式は次の様に与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} u(x) + g\delta(x)u(x) = Eu(x) \quad (5.20)$$

波動関数は

$$\begin{cases} u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x \leq 0) \\ u(x) = Ce^{ikx} \quad (0 \leq x) \end{cases}$$

となる。(5.20) を微小区間 ε で積分し、境界条件を求める。左辺の 2 項目は (5.19) から、右辺は微小区間で微分なので下の様になる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [u'(x)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + gu(0) = 0 \quad (5.21)$$

もう 1 つの境界条件として

$$u(\varepsilon) = u(-\varepsilon) \quad (5.22)$$

が得られ。(5.21)(5.22)より

$$\begin{cases} ik(Ae^{ik\varepsilon} - Be^{-ik\varepsilon} - Ce^{ik\varepsilon}) = \frac{2mg}{\hbar^2}C \\ Ae^{ik\varepsilon} + Be^{-ik\varepsilon} = Ce^{ik\varepsilon} \end{cases}$$

となり、 ε は微小区間なので

$$\begin{cases} ik(A - B - C) = \frac{2mg}{\hbar^2}C \\ A + B = C \end{cases}$$

となる。これをAで割り、 $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ を求めると

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\frac{ik\hbar^2}{mg} - 1} \quad (5.23)$$

$$\frac{C}{A} = \frac{1}{1 - \frac{mg}{ik\hbar^2}} \quad (5.24)$$

となり、(5.15)(5.17)と一致していることがわかる。

5.3 2 粒子スピンでの散乱

3 粒子スピンの散乱を考える前に図 5.4 の様な 2 粒子スピンの散乱を考える。粒子のポテンシャルには、前節で使った関数を用いる。スピン相互作用はハイゼンベルグ型であるパウリ行列の内積を考える。

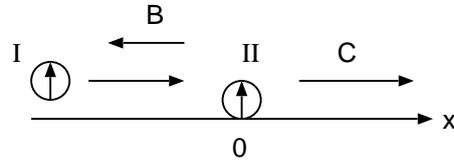


図 5.4: 2 粒子スピンの散乱

シュレディンガー方程式は以下の様に与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} |\Phi(x)\rangle + g\delta(x) \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II |\Phi(x)\rangle = E |\Phi(x)\rangle \quad (5.25)$$

波動関数 $|\Phi(x)\rangle$ は

$$|\Phi(x)\rangle = \begin{cases} |\phi\rangle e^{ikx} + B|\phi\rangle e^{-ikx} & (x \leq 0) \\ C|\phi\rangle e^{ikx} & (0 \leq x) \end{cases} \quad (5.26)$$

となり、 $|\phi\rangle$ は 2 粒子スピンの初期状態である。前節と同様に反射演算子を B、透過演算子を C とする。入射演算子を今回は 1 として考える。境界条件を求める為にシュレディンガー方程式を粒子 II の前後の微小区間 ε で積分すると下の様になる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} |\Phi(x)\rangle \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + g \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II |\Phi(0)\rangle = 0 \quad (5.27)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} (ikC - ik + ikB) + g \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II \right) |\phi\rangle = 0 \quad (5.28)$$

もう一つの境界条件として

$$|\phi\rangle + B|\phi\rangle = C|\phi\rangle \quad (5.29)$$

となる。(5.28)(5.29) より、演算子 B、C を求めると以下の様になる。

$$B = \frac{\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II}{\frac{ik\hbar^2}{mg} - \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II} \quad (5.30)$$

$$C = \frac{1}{1 - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^II} \quad (5.31)$$

2 粒子のスピン状態にこの演算子 B, C を作用させることで、透過後、反射後の粒子のスピン状態やその状態での確率が得られる。

5.4 3粒子スピンでの散乱

3粒子スピンの散乱を考える。図5.5の様に粒子II,IIIは $-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$ に固定し、そこに粒子Iを入射し、反射後、透過後の3粒子の状態がどのようになるかを求める。ポテンシャル、スピン相互作用は前節と同様に考える。

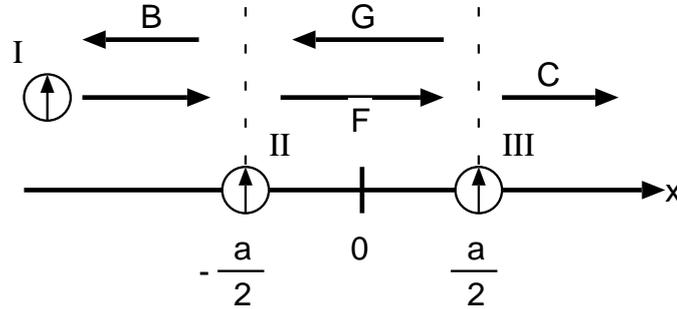


図 5.5: 3粒子スピンの散乱

シュレディンガー方程式は以下の様に与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} |\Phi(x)\rangle + \left(g\delta\left(x + \frac{a}{2}\right) \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{II} + g\delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{III} \right) |\Phi(x)\rangle = E |\Phi(x)\rangle \quad (5.32)$$

波動関数 $|\Phi(x)\rangle$ は

$$|\Phi(x)\rangle = \begin{cases} |\phi\rangle e^{ikx} + B|\phi\rangle e^{-ikx} & (x \leq -\frac{a}{2}) \\ F|\phi\rangle e^{ikx} + G|\phi\rangle e^{-ikx} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ C|\phi\rangle e^{ikx} & (\frac{a}{2} \leq x) \end{cases}$$

となり、 $|\phi\rangle$ は3粒子スピンの初期状態である。透過演算子、反射演算子をそれぞれB, F, G, Cとおく。前節と同様に入射演算子は1とする。粒子II, III位置での境界条件を求めていく。

まずは粒子IIでの境界条件を求める。粒子IIの前後の微小区間で積分 $\int_{-\frac{a}{2}-\epsilon}^{-\frac{a}{2}+\epsilon} dx$ をすると

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} |\Phi(x)\rangle \right]_{-\frac{a}{2}-\epsilon}^{-\frac{a}{2}+\epsilon} + g \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{II} |\Phi(0)\rangle = 0$$

$$-\frac{ik\hbar^2}{2m} \left(F e^{-\frac{ika}{2}} - G e^{\frac{ika}{2}} - e^{-\frac{ika}{2}} + B e^{\frac{ika}{2}} \right) + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{II} \left(e^{-\frac{ika}{2}} + B e^{\frac{ika}{2}} \right) = 0 \quad (5.33)$$

となり、(5.33)に $e^{\frac{ika}{2}}$ をかけて、見やすく並べ替えると以下の様になる。

$$F - G e^{ika} = \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{II} (1 + B e^{ika}) + 1 - B e^{ika} \quad (5.34)$$

もう一つの境界条件から

$$e^{-\frac{ika}{2}} + B e^{\frac{ika}{2}} = F e^{-\frac{ika}{2}} + G e^{\frac{ika}{2}}$$

$$F + G e^{ika} = 1 + B e^{ika} \quad (5.35)$$

となる。

続いて粒子Ⅲでの境界条件を求める。粒子Ⅲの前後の微小区間で積分 $\int_{\frac{a}{2}-\varepsilon}^{\frac{a}{2}+\varepsilon} dx$ をすると

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} |\Phi(x)\rangle \right]_{\frac{a}{2}-\varepsilon}^{\frac{a}{2}+\varepsilon} + g \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} |\Phi(0)\rangle = 0$$

$$-\frac{ik\hbar^2}{2m} \left(Ce^{\frac{ika}{2}} - Fe^{\frac{ika}{2}} + Ge^{-\frac{ika}{2}} \right) + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} Ce^{\frac{ika}{2}} = 0 \quad (5.36)$$

となり、(5.36)に $e^{-\frac{ika}{2}}$ をかけて、見やすく並べ替えると以下の様になる。

$$-F + Ge^{-ika} = \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C - C \quad (5.37)$$

もう1つの境界条件から

$$Ce^{\frac{ika}{2}} = Fe^{\frac{ika}{2}} + Ge^{-\frac{ika}{2}}$$

$$F + Ge^{-ika} = C \quad (5.38)$$

となる。

今求めた4つの境界条件の式から、F,Gを消去し最終的な透過、反射演算子であるB,Cを求める。(5.37)+(5.38),(5.38)-(5.37)より

$$2Ge^{-ika} = \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C \quad (5.39)$$

$$2F = 2C - \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C \quad (5.40)$$

となり、(5.39)(5.40)から以下の式が得られる。

$$\begin{cases} F = C - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C \\ G = \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} Ce^{ika} \end{cases} \quad (5.41)$$

F,Gが求めたのでこれを(5.34)(5.35)に代入する。(5.34)にF,Gを代入すると以下の様になる。

$$C - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} Ce^{2ika}$$

$$= \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} (1 + Be^{ika}) + 1 - Be^{ika} \quad (5.42)$$

(5.35)にF,Gを代入すると以下の様になる。

$$C - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C + \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} Ce^{2ika} = 1 + Be^{ika} \quad (5.43)$$

これより、簡単の為に $ka = n\pi$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) の時を考える。その時、 $e^{2ika} = 1$ となるので(5.42)(5.43)が下の様になる。

$$C - \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} C = \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} (1 + Be^{ika}) + 1 - Be^{ika}$$

$$C = 1 + Be^{ika}$$

上の2式より、まずBを求めると

$$\begin{aligned}
1 + Be^{ika} - \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} (1 + Be^{ika}) &= \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} (1 + Be^{ika}) + 1 - Be^{ika} \\
2Be^{ika} - \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} Be^{ika} - \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} Be^{ika} &= \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} + \frac{2mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} \\
Be^{ika} \left(1 - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} \right) &= \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} + \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}}
\end{aligned}$$

$$B = \frac{\frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} + \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}}}{1 - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}}} e^{-ika} \quad (5.44)$$

となり、Cも同様に計算して求めると

$$C = 1 + \frac{\frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} + \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}}}{1 - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}}}$$

$$C = \frac{1}{1 - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}} - \frac{mg}{ik\hbar^2} \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}}} \quad (5.45)$$

となる。見やすくするために $\frac{mg}{\hbar^2} = f$ とおくと以下の様になる。

$$\left\{ \begin{aligned} C &= \frac{1}{1 + \frac{if}{k} (\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}})} \\ B &= \frac{-\frac{if}{k} (\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}})}{1 + \frac{if}{k} (\vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{II}} + \vec{\sigma}^I \cdot \vec{\sigma}^{\text{III}})} e^{-ika} \end{aligned} \right. \quad (5.46)$$

C,Bそれぞれに、スピン相互作用が出ている事がわかる。初期状態 $|\phi\rangle$ を与えた場合、 $|\phi\rangle$ に C,B を作用させた時どうなるかが本研究で重要な所である。

第6章 エンタングルメントの生成

ここで実際に3粒子スピンの初期状態 $|\phi\rangle$ を与え、粒子II,IIIがエンタングルするかどうかを見ていく。またその状態の係数の絶対値2乗がその状態を作る確率になるので、その確率も見ていく。

6.1 初期状態 $|-1\rangle|1\rangle|1\rangle$

初期状態が $|1\rangle|1\rangle|1\rangle$ や、 $|-1\rangle|-1\rangle|-1\rangle$ では、そのまま透過、反射してしまうのでエンタングルメントは得られない。また、初期状態でエンタングルしてしまっていると生成できたかわからない。そこでエンタングルしていない初期状態 $|-1\rangle|1\rangle|1\rangle$ の場合を考える。B,Cは計算済みなのだが、そのまま初期状態を与えて計算はできない。3粒子スピンの合成の時にそれぞれの状態にスピン相互作用を作用させた。そこで固有値を求めたので、それを利用し計算するために、まず初期状態を $|S, S_z\rangle |S, S_z, S_{II,III}\rangle$ の形で表と次の様になる。

$$|-1\rangle|1\rangle|1\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.1)$$

これに (5.46) の B,C を作用させる。(4.4) を使い計算する。まず B を求めると

$$\begin{aligned} B|-1\rangle|1\rangle|1\rangle &= \frac{-\frac{if}{k} (\sigma^I \cdot \sigma^{II} + \sigma^I \cdot \sigma^{III})}{1 + \frac{if}{k} (\sigma^I \cdot \sigma^{II} + \sigma^I \cdot \sigma^{III})} e^{-ika} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ &= \frac{-\frac{if}{k} (-4)}{1 + \frac{if}{k} (-4)} e^{-ika} \frac{\sqrt{6}}{3} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle + \frac{-\frac{if}{k} (1+1)}{1 + \frac{if}{k} (1+1)} e^{-ika} \frac{\sqrt{3}}{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{\frac{4if}{3k}}{1 - \frac{4if}{k}} e^{-ika} (-|1\rangle|1\rangle|-1\rangle - |1\rangle|-1\rangle|1\rangle + 2|-1\rangle|1\rangle|1\rangle) \\ &\quad + \frac{-\frac{2if}{3k}}{1 + \frac{2if}{k}} e^{-ika} (|1\rangle|1\rangle|-1\rangle + |1\rangle|-1\rangle|1\rangle + |-1\rangle|1\rangle|1\rangle) \end{aligned}$$

この様に計算できる。これを状態ごとにくくると

$$B|-1\rangle|1\rangle|1\rangle = \left(\frac{-\frac{2if}{k}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} |1\rangle (|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle) + \frac{\frac{2if}{k} - \frac{8f^2}{k^2}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} |-1\rangle |1\rangle |1\rangle \right) e^{-ika} \quad (6.2)$$

となる。Cも同様に計算すると以下の様になる。

$$C|-1\rangle|1\rangle|1\rangle = \frac{-\frac{2if}{k}}{1 - \frac{2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} |1\rangle (|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle) + \frac{1}{1 - \frac{2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} |-1\rangle |1\rangle |1\rangle \quad (6.3)$$

(6.2)(6.3) が反射後、透過後の 3 粒子スピンの状態とその状態の確率を表している。これを見ると初期状態ではエンタングルしていなかったのだが、粒子 I のスピン状態が $|-1\rangle \rightarrow |1\rangle$ と spin-flip している時に粒子 II, III がエンタングルしていることがわかる。この方法でエンタングルメントを生成することができた。

続いてエンタングルメントを生成できる確率を見ていく。これよりエンタングルメントが生成できる確率を P_E とする。確率は状態の係数の絶対値 2 乗なので

$$P_E = 4 \left| \frac{\frac{-2if}{k}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} \right|^2$$

$$= \frac{\frac{16f^2}{k^2}}{1 + \frac{20f^2}{k^2} + \frac{64f^4}{k^4}}$$

確率は上の様な式になる。計算過程で $ka = n\pi$ とおいたので、 $\frac{k}{f} = \frac{n\pi}{fa}$ となる。式の形ではわかりにくいので、 $fa = 1$ として計算し、グラフにしてみる。

$$P_E = \frac{\frac{16}{(n\pi)^2}}{1 + \frac{20}{(n\pi)^2} + \frac{64}{(n\pi)^4}} \quad (6.4)$$

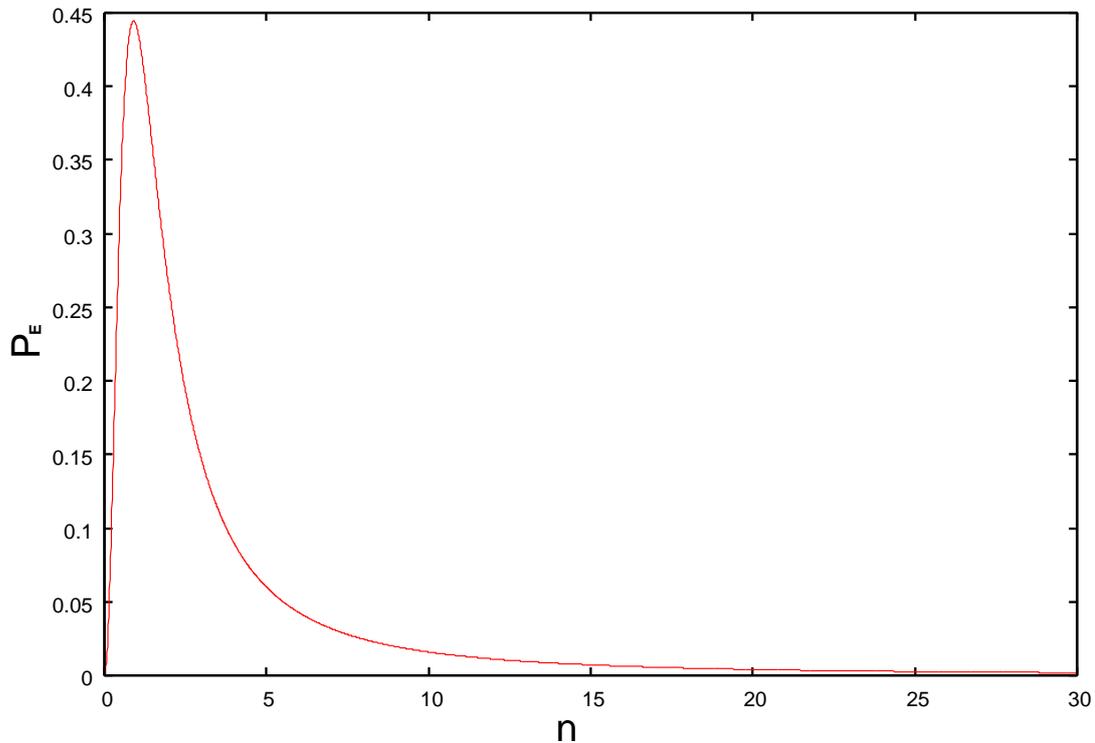


図 6.1: P_E と n の関係

上の様になり、エンタングルメントを生成できる最大確率が約 44 % となった。

横軸は n だが、実質エネルギーである。エネルギーが大きいとそのまま透過していくので、このグラフは正しいと言える。計算過程で $ka = n\pi$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) としたので n が整数の所しかプロット点は取れないが、見やすくするため上の様にした。実際はプロット点の間で振動しているかもしれない。今後の課題として n が整数の所だけでなく、すべての点で計算できるようにしていく。

6.2 スピン状態 $| -1 \rangle$ の粒子を 2 回入射

もっとエンタングルメント生成確率を向上させる為に次の様な方法を行う。初期状態 $| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ の後、粒子 II, III の状態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle)$, $| 1 \rangle | 1 \rangle$ ここにもう 1 度スピン状態が $| -1 \rangle$ の粒子を入射する。この時の初期状態が以下の様になります。

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} | -1 \rangle (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle) \\ | -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle \end{cases} \quad (6.5)$$

$| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ の時は先ほどと同じなのでもう 1 つの初期状態を計算する。まずスピン相互作用を計算できる形に直すと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} | -1 \rangle (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle - \frac{\sqrt{6}}{3} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \rangle \right) \quad (6.6)$$

となる。これに B, C を作用させると

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} B | -1 \rangle (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle) \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-\frac{8f^2}{k^2}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} | -1 \rangle (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle) + \frac{-\frac{4if}{k}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} | 1 \rangle | -1 \rangle | -1 \rangle \right) e^{-ika} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} C | -1 \rangle (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle) \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - \frac{2if}{k}}{1 - \frac{2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} | -1 \rangle (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle) + \frac{-\frac{4if}{k}}{1 - \frac{2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} | 1 \rangle | -1 \rangle | -1 \rangle \right) \end{cases} \quad (6.7)$$

となる。2 回目 $| -1 \rangle$ を入射した後のエンタングルする確率を見ていく。一回目の後、粒子 II, III の状態が $\frac{1}{\sqrt{2}} (| 1 \rangle | -1 \rangle + | -1 \rangle | 1 \rangle)$ の確率を P_{E1} とすると、 $| 1 \rangle | 1 \rangle$ の確率が $1 - P_{E1}$ となるので 2 回目でエンタングルする確率 P_{E2} は

$$P_{E2} = P_{E1} \left(\left| \frac{-\frac{8f^2}{k^2}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} \right|^2 + \left| \frac{1 - \frac{2if}{k}}{1 - \frac{2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} \right|^2 \right) + 4(1 - P_{E1}) \left| \frac{-\frac{2if}{k}}{1 + \frac{-2if}{k} + \frac{8f^2}{k^2}} \right|^2$$

この様に計算できる。同様に、2 回だけではなく、何度も状態 $| -1 \rangle$ を入射した時をプロットし、推移を見ていく。この時、前節と同様に $fa = 1$ とした。

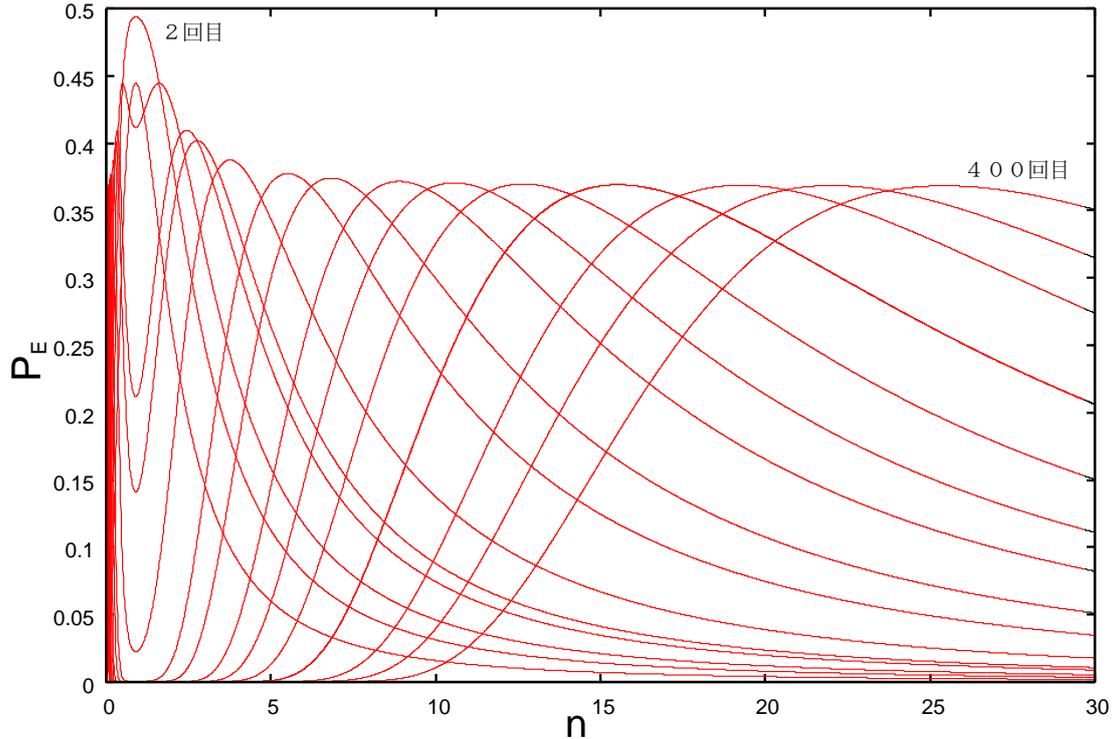


図 6.2: 何度も入射した時の P_E と n の関係

このグラフから、確率が最も高かったのが 2 回目である。回数が少ないと、エネルギーが高い時にそのまま透過してしまう、しかし回数を増やすことで、エネルギーが高くてもエンタングルメントを生成できることがわかった。更に、回数を増やすことでピークの幅が広がっている。このことから、広いエネルギー幅で安定した確率を得られるということがわかった。しかし、最大で約 49% の確率でしかエンタングルメントを生成できなかった。2 回目は若干上がったが、それでも高い確率は得られなかった。

6.3 高確率でエンタングルメントを生成

更にエンタングルメント生成確率を上昇させる為に次のような方法を行う。初期状態 $| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ の場合、粒子 I のスピン状態が $| -1 \rangle \rightarrow | 1 \rangle$ と spin-flip している時に粒子 I, III がエンタングルしていることがわかった。これを利用し、透過後、反射後の粒子を測定し、spin-flip していたらエンタングルメントを生成できたのでそのまま、spin-flip していなければもう 1 度同じ $| -1 \rangle$ の状態の粒子を入射する。そしてまた透過、反射してきた粒子を測定するという操作を m 回繰り返した時を考える。その時の確率は次のようになる。

$$P_E = P_{E1} \left(1 + (1 - P_{E1}) + (1 - P_{E1})^2 + (1 - P_{E1})^3 + \dots + (1 - P_{E1})^{m-1} \right) \quad (6.8)$$

1 項目が一回目でエンタングルメントを生成できる確率、2 項目が 2 回目での確率 …… m 回目まで続く。 $\frac{k}{f} = 3\pi$ の時をグラフで見ると。

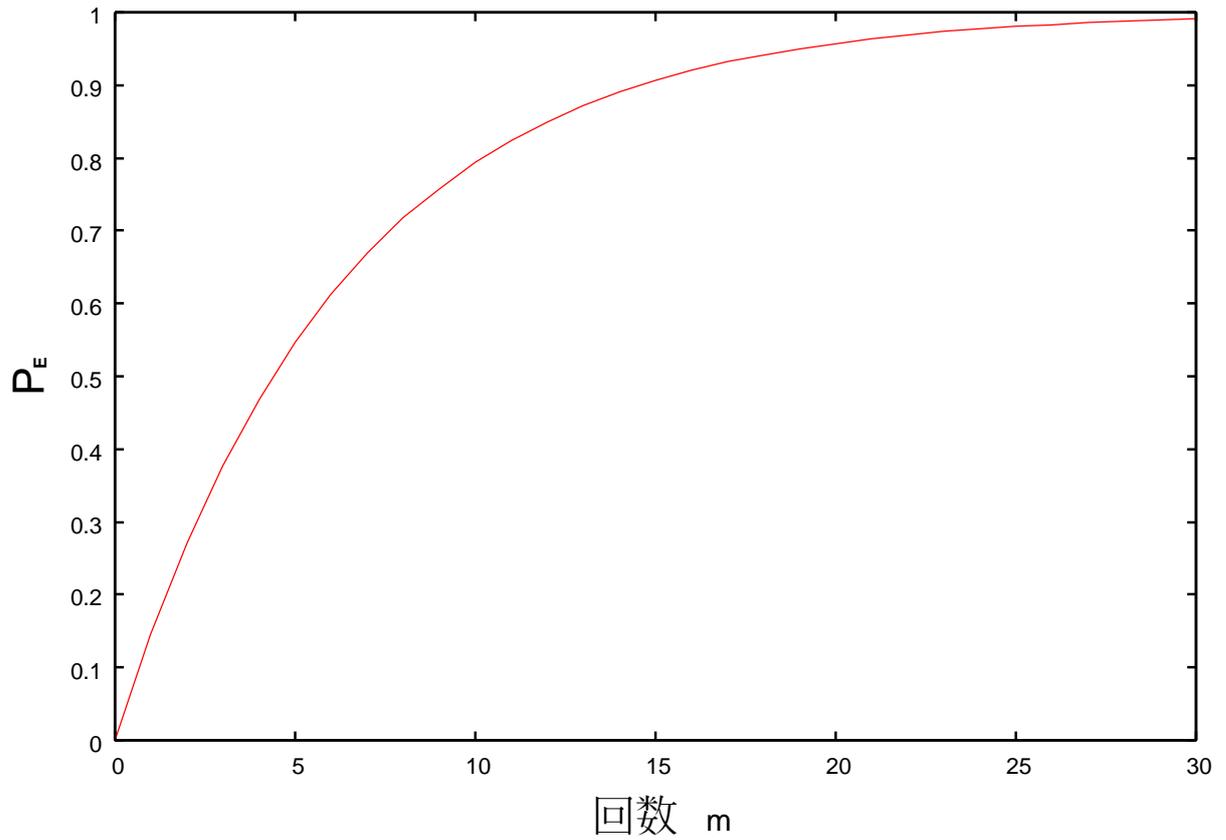


図 6.3: m 回繰り返した時の P_E 変化

$\frac{k}{f} = 3\pi$ の時、1 回目では約 15 % しかエンタングルメントを生成できなかったが、この操作を繰り返す事でほぼ 100 % エンタングルメントを生成できる事がわかった。どの様にエネルギーを与えても、この操作を何度も繰り返す事でほぼ 100 % エンタングルメントが生成できる事がわかった。これは、入射した粒子が spin-flip した時にだけエンタングルメントしてるのでこの操作によりほぼ 100 % の結果が得られる。

第7章 まとめ

7.1 結論

まず一次元箱型ポテンシャルでの散乱について計算した。箱の面積 $V_0 a$ を一定にし、 $a \rightarrow 0, V_0 \rightarrow \infty$ と極限を与える事で、関数ポテンシャルの場合の計算結果と一致している事を確かめた。

3粒子スピンの散乱を考え、透過後、反射後の演算子を計算した。初期状態にその演算子を作用させることで透過後、反射後のスピン状態とその状態での確率を知る事ができる。そこにエンタングルしていない初期状態 $| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ を入射した。すると、初期状態ではエンタングルしていなかったのだが、粒子 II, III がエンタングルした。この時の粒子 I に着目すると、粒子 I が spin-flip している場合だけ粒子 II, III がエンタングルしている事がわかった。この時のエンタングルメントを生成できる確率は最大で約 44% しか得られなかった。しかし SPDC 法より高い確率でエンタングルメントを生成できるという事がわかった。確率とエネルギーをグラフにした時、ピークの幅が狭かった。この事からこの方法でなるべく高い確率でエンタングルメントを生成しようとすると、エネルギー幅が狭いので、条件を与えるときに苦労しそうだ。エネルギーが高いと、入射した粒子がそのまま透過してしまうので、エネルギーが高い時はこの方法ではエンタングルメント生成は期待できない。

次に、初期状態 $| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ の後、粒子 II, III に再び状態 $| -1 \rangle$ の粒子を何度も入射するとどの様になるかを考えた。2回目の粒子入射で最も大きい値である 49% が得られたが、入射回数を増やしていくと最大確率は下がっていき、約 36% に収束した。最大値は下がったものの、高いエネルギーで最大確率が得られた。また、広いエネルギー幅で安定した確率を得られる事から、条件を与えるのに都合が良さそうだ。

次に、初期状態 $| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ の時、粒子 I が spin-flip している場合だけ粒子 II, III がエンタングルしている事に着目し、入射した粒子を spin-flip したか測定しながら入射していく事を考えた。この方法で一回目の生成確率がどんなに低くても回数を増やす事でほぼ 100% 生成できるという事がわかった。この場合、条件も自由に与えても、入射回数を増やす事で 100% に近づける事ができる。

7.2 今後の課題

計算過程で $ka = n\pi$ としたので n が整数の時しか確かめることができなかったので、すべての時が計算できる様にする。初期状態 $| -1 \rangle | 1 \rangle | 1 \rangle$ の場合でしか計算が完了していないので、ほかの初期状態を与えた場合も計算する。粒子 II, III の状態が未知の時、エンタングルメントを生成することができるか理論的に確かめる。

参考文献

- [1] 林正人 : 「量子情報理論入門」サイエンス社 (2004)
- [2] M.Hayashi, Quantum information: An introduction, Springer(2006)
- [3] Michael A.Nielsen and Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press(2000)
- [4] 林明久 : 東北大学大学院情報科学研究科、集中講義ノート (2008)
- [5] 竹内繁樹 : 「量子コンピュータ - 超並列計算のからくり」講談社 (2005)
- [6] F.Ciccarello, M.Paternostro, M.S.Kim, and G.M.Palma, Extraction of Singlet States from Noninteracting High-Dimensional Spins, Phys. Rev. Lett. **100**, 150501(2008)
- [7] L.I.Schiff, 井上鍵 訳 : 「新版 量子力学 (上)」吉岡書店 (1970)

謝辞

本論文を作成するにあたり、林明久先生には終始丁寧なご指導をしていただいたことに感謝し、お礼申し上げます。また鈴木敏男先生、田島直樹先生にも本研究及び日常なことにおいても、実に丁寧な指導、お世話をしていただきました。同じ研究室の杉本宏行先輩にも大変為になる助言を頂きました。

本研究に対してご意見をいただいた、多くの物理工学科の先生方にもお礼申し上げ、謝辞の言葉とさせていただきます。