卒業論文発表会

1月27日, 2010, 福井大学工学部物理工学科

スピン相互作用による エンタングルメントの生成

物理工学科　谷中 裕太

エンタングルメントとは？

qubit・・・・量子ビット。最も簡単な量子系。

基本的な2つの状態を持つ。スピンもqubit（upとdown）。

$$|\phi\rangle^{AB} = |0\rangle^{A}|0\rangle^{B} + |1\rangle^{A}|1\rangle^{B}$$

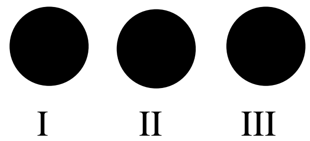
$$\text{自分のqubitの状態}\left\{\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 0 \\ 1 \longrightarrow 1 \end{array}\right\}\text{相手のqubitの状態}$$

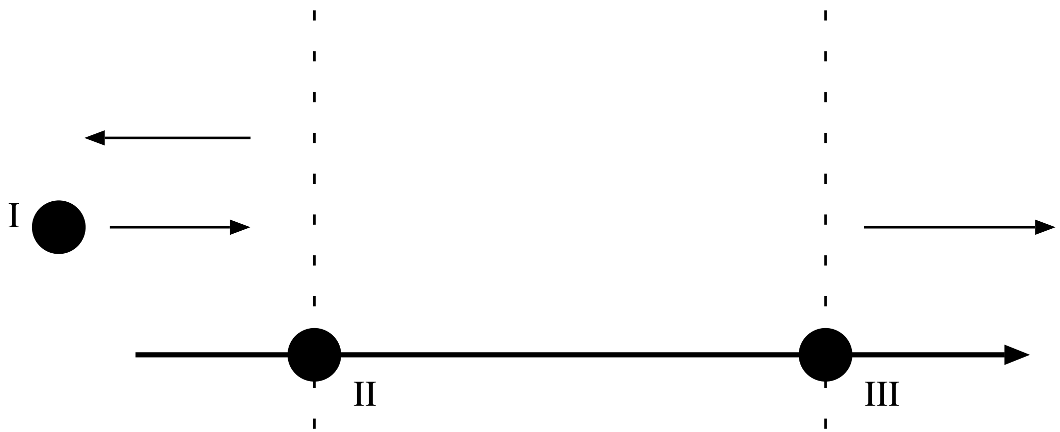
エンタングルメントが、何に使えるか.

- **量子テレポーテーション**
- **量子擬テレパシー**

今回考える生成方法

3つのスピンを持った粒子



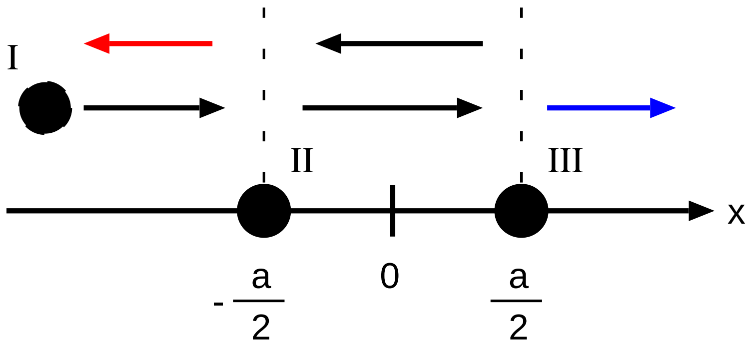


生成

$|\Phi(x)\rangle$：波動関数

$|\phi\rangle$：３粒子スピンの初期状態

$$|\Phi(x)\rangle = \begin{cases} |\phi\rangle e^{ikx} + B|\phi\rangle e^{-ikx} & (x \le -\frac{a}{2}) \\ F|\phi\rangle e^{ikx} + G|\phi\rangle e^{-ikx} & (-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}) \\ C|\phi\rangle e^{ikx} & (\frac{a}{2} \le x) \end{cases}$$



シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|\Phi(x)\rangle + \left(g\delta\left(x+\frac{a}{2}\right)\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}} + g\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)|\Phi(x)\rangle = E|\Phi(x)\rangle$$

$\vec{\sigma}$：パウリ行列

境界条件を求める為に、$\int_{-\frac{a}{2}-\varepsilon}^{-\frac{a}{2}+\varepsilon} dx$、$\int_{\frac{a}{2}-\varepsilon}^{\frac{a}{2}+\varepsilon} dx$で積分する ($\varepsilon$は微小区間)

シュレディンガー方程式より

$$\begin{cases} F - e^{ika}G = \frac{2mg}{ik\hbar^2}\vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{II}}(1 + e^{ika}B) + 1 - e^{ika}B \\ -F + e^{-ika}G = \frac{2mg}{ik\hbar^2}\vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{III}}C - C \end{cases}$$

左右の解が一致することより

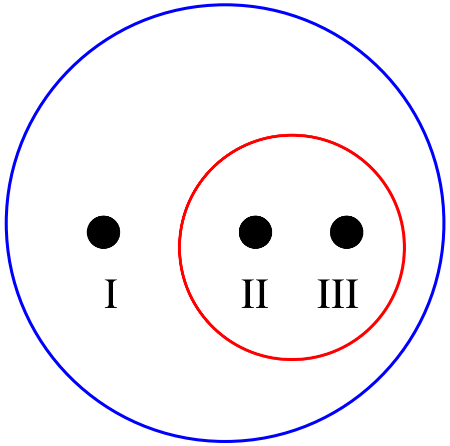
$$\begin{cases} F + e^{ika}G = 1 + e^{ika}B \\ F + e^{-ika}G = C \end{cases}$$

これより、簡単の為に $ka = n\pi\ (n = 1, 2, 3 \cdots)$ **の時を考え** $e^{2ika} = 1, \frac{mg}{\hbar^2} = f$ **とおく**

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \frac{1}{1 + \frac{if}{k}\left(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{II}} + \vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)} \\ B &= \frac{-\frac{if}{k}\left(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{II}} + \vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)}{1 + \frac{if}{k}\left(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{II}} + \vec{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \vec{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)}e^{-ika} \end{aligned}}$$

スピン

up=$|\,1\,\rangle$,down=$|{-1}\rangle$



３粒子のスピンの合成

$S=\frac{3}{2}$の時 $S_z=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$

４通りのスピン状態を $|\,S,S_z\rangle$ とおく

$$\begin{cases} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle=|\,1\,\rangle^{\mathrm{I}}|\,1\,\rangle^{\mathrm{II}}|\,1\,\rangle^{\mathrm{III}} \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle|{-1}\rangle+|\,1\,\rangle|{-1}\rangle|\,1\,\rangle+|{-1}\rangle|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle) \\ |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\,1\,\rangle|{-1}\rangle|{-1}\rangle+|{-1}\rangle|\,1\,\rangle|{-1}\rangle+|{-1}\rangle|{-1}\rangle|\,1\,\rangle) \\ |\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=|{-1}\rangle|{-1}\rangle|{-1}\rangle \end{cases}$$

他に $S=\frac{1}{2}$ で $S_z=\pm\frac{1}{2}$ の時が２種類存在する

$|\,S,S_z,S_{\mathrm{II,III}}\rangle$ とおく

$$
\begin{cases}
|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\,1\,\rangle\left(|\,1\,\rangle|-1\rangle - |-1\rangle|\,1\,\rangle\right) \\
|\,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle\left(|\,1\,\rangle|-1\rangle - |-1\rangle|\,1\,\rangle\right)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle|-1\rangle - |\,1\,\rangle|-1\rangle|\,1\,\rangle + 2|-1\rangle|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle\right) \\
|\,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-|-1\rangle|-1\rangle|\,1\,\rangle - |-1\rangle|\,1\,\rangle|-1\rangle + 2|\,1\,\rangle|-1\rangle|-1\rangle\right)
\end{cases}
$$

C, B に表れる、パウリ行列の内積に８つの状態を作用させると

$$
\begin{cases}
\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}|\,\frac{3}{2},s_z\,\rangle = |\,\frac{3}{2},s_z\,\rangle \\
\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{III}}|\,\frac{3}{2},s_z\,\rangle = |\,\frac{3}{2},s_z\,\rangle \\
\left(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}} + \vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)|\,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},0\,\rangle = 0 \\
\left(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}} + \vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)|\,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},1\,\rangle = -4|\,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},1\,\rangle
\end{cases}
$$

初期状態$|\,\phi\,\rangle$が$|-1\rangle^{\mathrm{I}}|\,1\,\rangle^{\mathrm{II}}|\,1\,\rangle^{\mathrm{III}}$の場合

$$|-1\rangle|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\,\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|\,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\,\rangle$$

これにCを作用させると

$$\begin{aligned} C|-1\rangle|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle &= \frac{1}{1+\frac{if}{k}\left(\overrightarrow{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\overrightarrow{\sigma}^{\mathrm{II}}+\overrightarrow{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\overrightarrow{\sigma}^{\mathrm{III}}\right)}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\,\rangle+\frac{\sqrt{3}}{3}|\,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\,\rangle\right) \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{1+\frac{if}{k}(-4)}|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\,\rangle+\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{if}{k}(1+1)}|\,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\,\rangle \end{aligned}$$

透過後の状態

$$C|-1\rangle|1\rangle|1\rangle = \frac{-\frac{2if}{k}}{1-\frac{2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|1\rangle(|1\rangle|-1\rangle+|-1\rangle|1\rangle) + \frac{1}{1-\frac{2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|-1\rangle|1\rangle|1\rangle$$

反射後の状態

$$B|-1\rangle|1\rangle|1\rangle = \left(\frac{\frac{-2if}{k}}{1+\frac{-2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|1\rangle(|1\rangle|-1\rangle+|-1\rangle|1\rangle) + \frac{\frac{2if}{k}-\frac{8f^2}{k^2}}{1+\frac{-2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|-1\rangle|1\rangle|1\rangle\right)e^{-ika}$$

結果

初期状態の粒子Ⅰが $|-1\rangle \to |1\rangle$ **：Ⅱ,Ⅲはエンタングルしている**

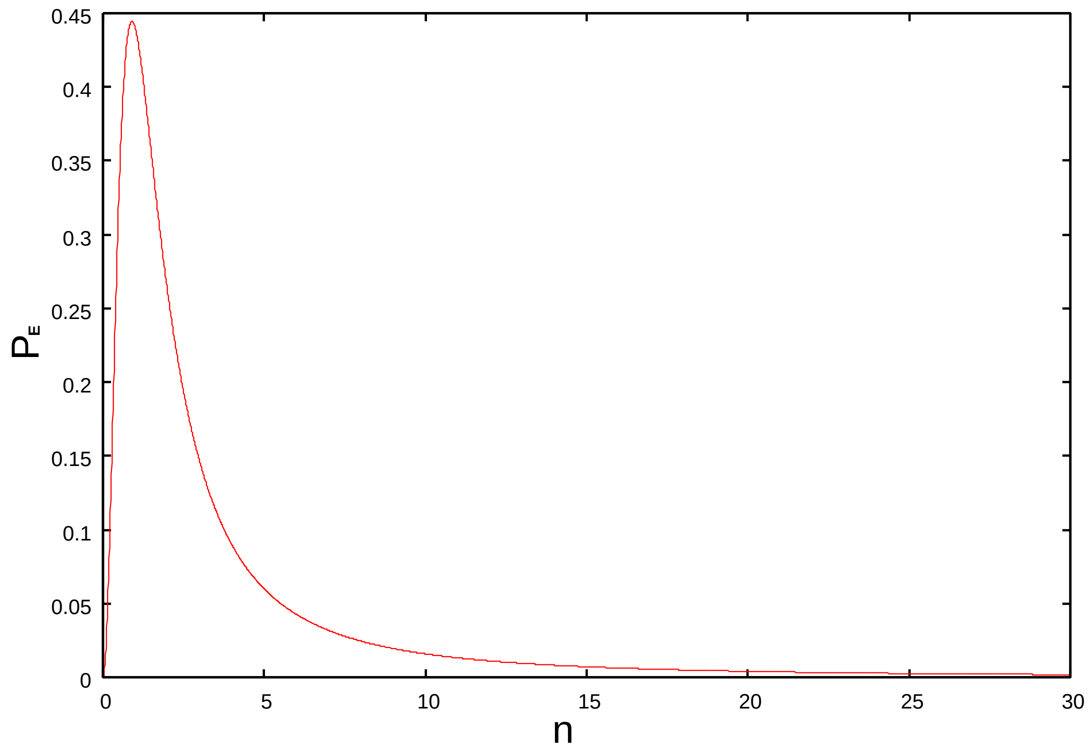
初期状態の粒子Ⅰが $|-1\rangle \to |-1\rangle$ **：Ⅱ,Ⅲの状態は変わっていない(エンタングルしていない)**

確率

エンタングルメントが生成できる確率を P_E とおく

$\frac{k}{f} = \frac{n\pi}{fa}$ **なので** $fa = 1$ **として、** $\frac{k}{f} = n\pi$

$$P_E = 4\left|\frac{\frac{-2if}{k}}{1+\frac{-2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}\right|^2 = \frac{\frac{16f^2}{k^2}}{1+\frac{20f^2}{k^2}+\frac{64f^4}{k^4}} = \frac{\frac{16}{(n\pi)^2}}{1+\frac{20}{(n\pi)^2}+\frac{64}{(n\pi)^4}}$$



2回目

1回目の後のⅡ, Ⅲの状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle)\ ,\ |1\rangle|1\rangle$$

もう1度 $|-1\rangle$ の状態の粒子を入射する

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle)$ **の時**

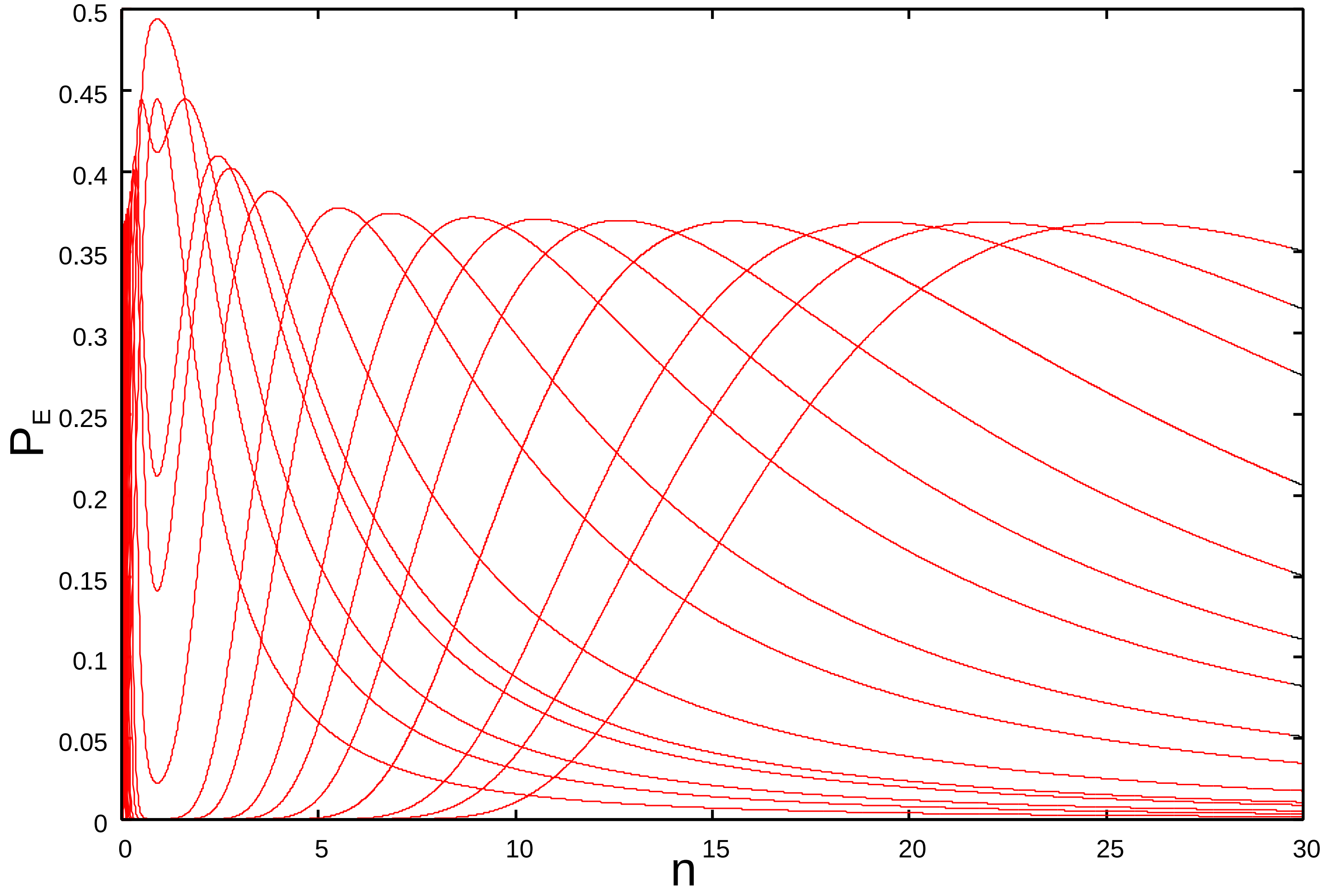
$$\frac{1}{\sqrt{2}}C|-1\rangle(|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\frac{2if}{k}}{1-\frac{2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|-1\rangle(|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle) + \frac{-\frac{4if}{k}}{1-\frac{2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|1\rangle|-1\rangle|-1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}B|-1\rangle(|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\frac{8f^2}{k^2}}{1+\frac{-2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|-1\rangle(|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle) + \frac{-\frac{4if}{k}}{1+\frac{-2if}{k}+\frac{8f^2}{k^2}}|1\rangle|-1\rangle|-1\rangle\right)e^{-ika}$$

$|1\rangle|1\rangle$ **の時は、1回目と同じ結果**

$|-1\rangle$を何度も入射してエンタングルする確率



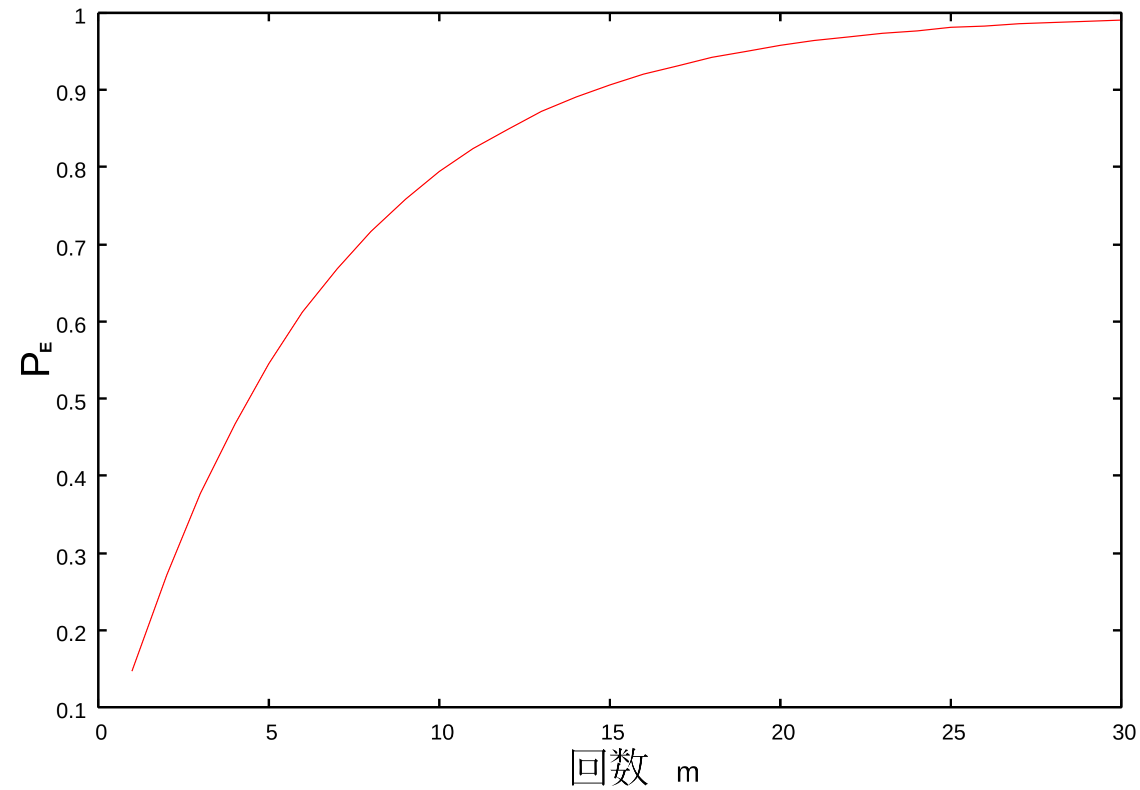
初期状態が $|-1\rangle|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle$ で粒子Iを入射した後、粒子Iの状態を測定し

- $|-1\rangle \to |\,1\,\rangle$ なら、エンタングルしているのでそのまま
- $|-1\rangle \to |-1\rangle$ ならもう１度 $|-1\rangle$ の状態の粒子を入射し、spin-flip するまで続ける

初期状態が $|-1\rangle|\,1\,\rangle|\,1\,\rangle$ で、エンタングルメントを生成できる確率を P とすると

$$P_E = P\left(1 + (1-P) + (1-P)^2 + (1-P)^3 + \cdots + (1-P)^{m-1}\right)$$

$\frac{k}{f} = 3\pi$ とすると

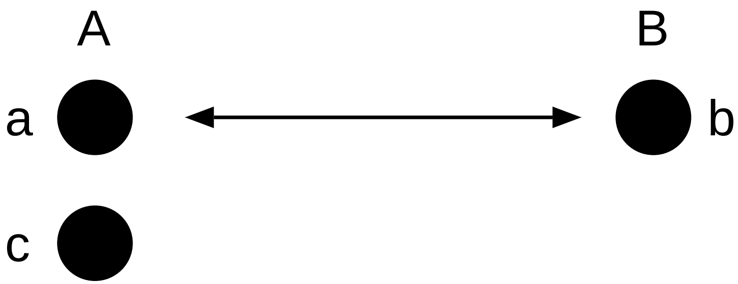


まとめ

- spin-flipしたか測定せず同じ状態の粒子を入射すると、エンタングルする確率の最大値は下がっていく。測定せず確率の最大値が最も高かったのは2回目。

- 入射した粒子をspin-flipしたか見ながら、同じ状態の粒子を入射していくことで、ほぼ１００%エンタングルメントを生成できる。

量子テレポーテーション



$$|\Psi\rangle^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle^{a}|0\rangle^{b} + |1\rangle^{a}|1\rangle^{b}\right)$$

A、Bは古典的通信可能

未知の状態のqubit c→ $|\phi^{c}\rangle = \alpha|0\rangle^{c} + \beta|1\rangle^{c}$

Aがqubit a,cに対してBell基底に関する測定

$$\begin{cases} |\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \\ |\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \\ |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \\ |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) \end{cases}$$

測定結果をBに伝える

Bはその測定結果に依存したユニタリー変換を、エンタングルしているqubit bに行う

その結果qubit bの状態が $|\phi\rangle$ **となる**

量子擬テレパシー

Cが $x = 0, 1, 2 y = 0, 1, 2$ をランダムに選び、Aにx、Bにyを渡す。

AとBは自分のもらった数字はわかるが、他人のもらった数字はわからない。

AとBは通信不可。

AとBは自分の数字を見て $a = 0 or 1, b = 0 or 1$ を宣言（2ビット）

$x = y$ の時は $a = b$、$x \neq y$ の時は $a \neq b$ ならAとBの勝ち。

x= 0 1 2　↓↓↓　a= 0 1 1

y= 0 1 2　↓↓↓　b= 0 1 1

古典的戦略による確率 $P_{classical} = \frac{7}{9}$

$$| \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0 \rangle | 0 \rangle + | 1 \rangle | 1 \rangle)$$

AとBがx、yに応じて、自分のqubitにユニタリー変換。

$$| \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| 0 \rangle | 0 \rangle + e^{i\theta(x-y)} | 1 \rangle | 1 \rangle \right)$$

自分のqubitにHadamard変換。

$$| \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(1 + e^{i\theta(x-y)} \right) (| 0 \rangle | 0 \rangle + | 1 \rangle | 1 \rangle) + \left(1 - e^{i\theta(x-y)} \right) (| 0 \rangle | 1 \rangle + | 1 \rangle | 0 \rangle) \right)$$

A、Bはそれぞれ自分のqubitを測定し、a,bを宣言する。

$$
\begin{array}{rcl}
x = y & & P_0 = 1 \\
|x - y| = 1 & & P_1 = 2\left|\dfrac{(1 - e^{i\theta(x-y)})}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \dfrac{(1 - cos\theta)}{2} \\
|x - y| = 2 & & P_2 = 2\left|\dfrac{(1 - e^{i\theta(x-y)})}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \dfrac{(1 - cos\theta)}{2} \\
P_{quantum} & = & \dfrac{3}{9}P_0 + \dfrac{4}{9}P_1 + \dfrac{2}{9}P_2 = \dfrac{1}{9}(6 - 2cos\theta - cos2\theta) = \dfrac{5}{6} \ \ (\theta = \dfrac{2}{3}\pi) \\
P_{quantum} & > & P_{classical}
\end{array}
$$