卒業論文発表会

２月１日，2007，福井大学工学部物理工学科

superdence coding

物理工学科　03380260

鈴木　靖

superdense codingの説明

- アリスはボブに２ビットの古典情報を送りたいが、一つのキュービットしか送れない

- エンタングル(もつれ合う状態)のキュービットを持っている場合

  アリスは１キュービットをボブに送るだけでボブは２ビットの古典情報を得ることができる

- エンタングルした状態とは　$\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$

  これはアリスが測定して０が出たらボブのキュービットも０でアリスが測定して１がでたらボブのキュービットも１が出るという状態であることを示している

アリスがボブにキュービットを送る前にすること

- ００を送りたい場合はなにもしない　(｜００＞＋｜１１＞)√2

１を送りたい場合は位相反転１→ー１　(｜００＞ー｜１１＞)√2

１０を送りたい場合は量子ＮＯＴゲート０→１　１→０　(｜１０＞＋｜０１＞)√2

１１を送りたい場合はiＹゲート０→１　１→ー０　(｜１０＞ー｜０１＞)√2

Bell基底とは

- ｜Ψ１＞＝(｜００＞＋｜１１＞)√2

｜Ψ２＞＝(｜００＞ー｜１１＞)√2

｜Ψ３＞＝(｜１０＞＋｜０１＞)√2

｜Ψ４＞＝(｜１０＞ー｜０１＞)√2

ボブが行う測定方法

Bell基底は正規直交しているので

｜Ψ＞＝A｜Ψ１＞＋B｜Ψ２＞＋C｜Ψ３＞＋D｜Ψ４＞

と書き直すことができる(A、B、C、Dは定数)

もしアリスが(｜００＞＋｜１１＞)√２を送ったとすれば

A＝１ B＝C＝D＝０ となり

アリスが送ったのは(｜００＞＋｜１１＞)√２

という状態であることがわかる

superdense coding 初期状態が異る場合

$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$

という状態だったらどうなるかを考える

アリスが行う動作は同じとして、できあがる状態は

$|\Phi 1\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$

$|\Phi 2\rangle = \alpha|00\rangle - \beta|11\rangle$

$|\Phi 3\rangle = \alpha|10\rangle + \beta|01\rangle$

$|\Phi 4\rangle = \alpha|10\rangle - \beta|01\rangle$

ボブがBell測定をする

Bell基底は正規直交しているので

｜Ψ＞＝Ａ｜Ψ１＞＋Ｂ｜Ψ２＞＋Ｃ｜Ψ３＞＋Ｄ｜Ψ４＞と書き直せる

アリスがα｜００＞＋β｜１１＞を送ったとすれば

Ａ＝(α＋β)／√2　Ｂ＝(α－β)／√2　Ｃ＝Ｄ＝0となり

｜Φ１＞＝(α＋β)／√2｜Ψ１＞＋(α－β)／√2｜Ψ２＞と書き直せる

(アリスが｜Φ１＞を送ったときボブが｜Ψ１＞を観測したら成功｜Φ２＞ならば

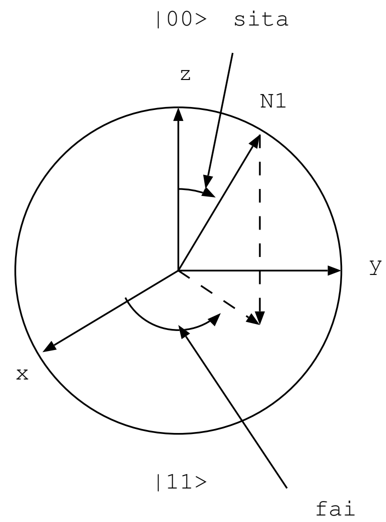
｜Ψ２＞、｜Φ３＞ならば｜Ψ３＞、｜Φ４＞ならば｜Ψ４＞のとき成功とする)

Bloch球

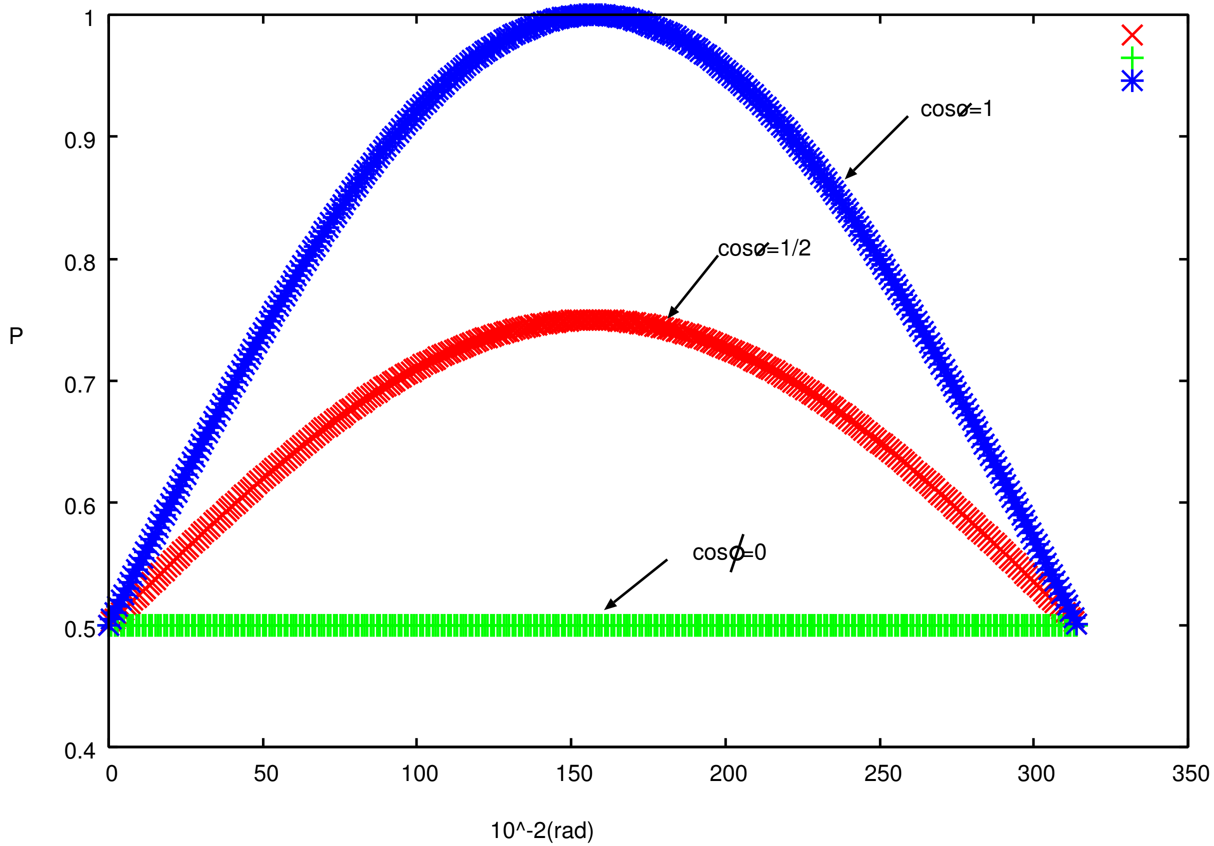
α｜００＞＋β｜１１＞＝cos(θ／2)｜００＞＋exp(iφ)＊sin(θ／2)｜１１＞
と書き直すことができる

『α＝cos(θ／2)、β＝exp(iφ)＊sin(θ／2)｜１１＞』

(０＜＝θ＜＝π、０＜＝φ＜＝２π)



成功確率P $P = |\alpha + \beta|^2 / 2 = (1 + \sin\theta \cos\phi) / 2$



基底の改良のためＡグループとＢグループにわける

$|\Phi 1\rangle = |\Phi 1\rangle_A \quad |\Phi 2\rangle = |\Phi 2\rangle_A$

$|\Phi 3\rangle = |\Phi 1\rangle_B \quad |\Phi 4\rangle = |\Phi 2\rangle_B$

Ａグループの基底について考える

$|\Psi\rangle_A$=cos$(\theta_m/2)|00\rangle$ +exp$(i\phi_m)$*sin$(\theta_m/2)|11\rangle$

$|-\Psi\rangle_A$=cos$(\theta_m/2)|00\rangle$ -exp$(i\phi_m)$*sin$(\theta_m/2)|11\rangle$

基底を用いて$\phi 1_A$ $\phi 2_A$を書き換える

$\phi 1_A = \langle\Psi|\phi 1\rangle_A|\Psi\rangle + \langle -\Psi|\phi 2\rangle_A|-\Psi\rangle$

$\phi 2_A = \langle\Psi|\phi 1\rangle_A|\Psi\rangle + \langle -\Psi|\phi 2\rangle_A|-\Psi\rangle$

成功確率Ｐ

Ｐ＝$(|\langle \Psi | \phi 1 \rangle_A|^2)/2$ ＋$(|\langle -\Psi | \phi 2 \rangle_A|^2)/2$

$|\langle W | F \rangle|^2$＝(1＋W・F)/２を用いて書き換えると

Ｐ＝1/2＋$\Psi \cdot (\phi 1 - \phi 2)/2$となり、Ｐが最大となるような$\Psi$を求める

$\Psi = \phi 1 - \phi 2$の時最大となり、規格化して$\Psi = (\phi 1 - \phi 2)$ /$|\phi 1 - \phi 2|$

改良した基底

$$|\Psi\rangle_A = (|00\rangle + exp(i\phi)|11\rangle)/2^{\frac{1}{2}}$$

$$|\Psi\rangle_A = (|00\rangle - exp(i\phi)|11\rangle)/2^{\frac{1}{2}}$$

$$|\Psi\rangle_B = (|10\rangle + exp(i\phi)|01\rangle)/2^{\frac{1}{2}}$$

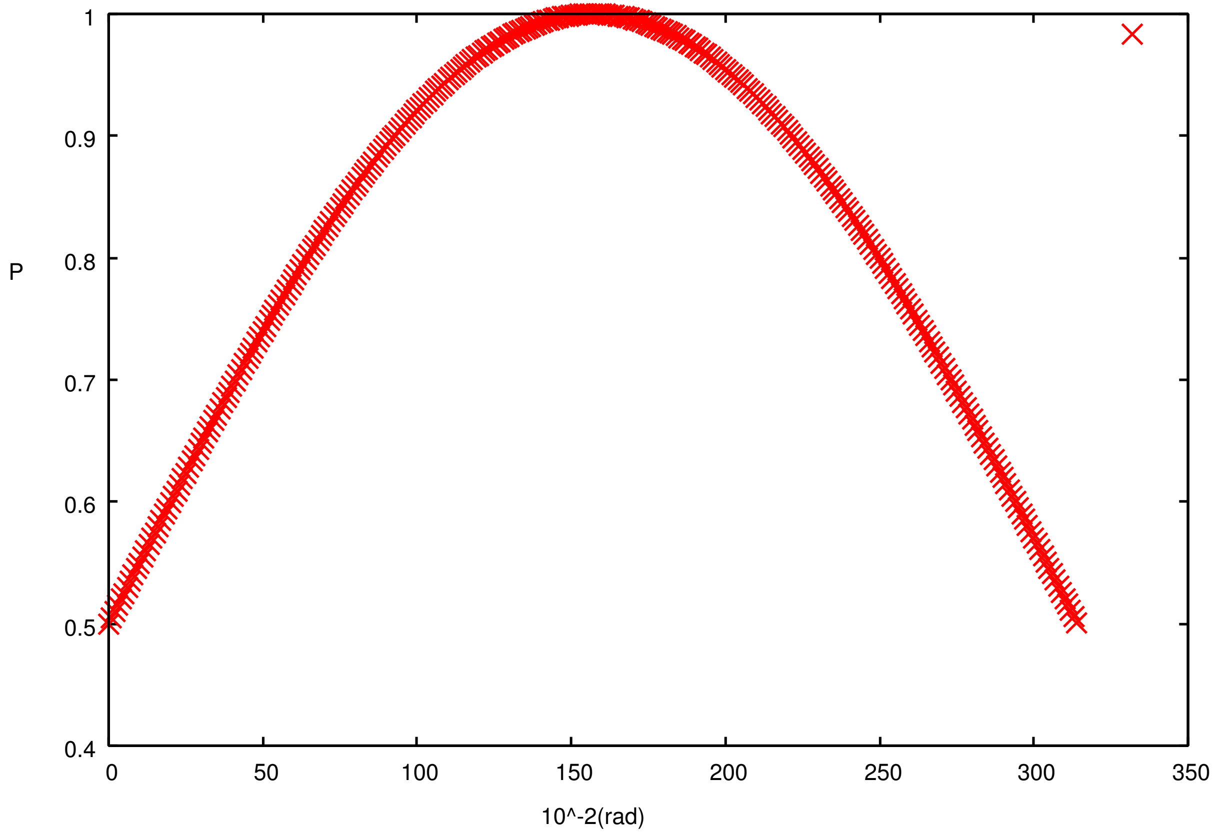
$$|\Psi\rangle_B = (|10\rangle - exp(i\phi)|01\rangle)/2^{\frac{1}{2}}$$

改良した基底での成功確率Ｐ

$$P = \{|\langle \Psi | \phi 1 \rangle_A|^2 + |\langle -\Psi | \phi 2 \rangle_A|^2$$

$$+ |\langle \Psi | \phi 1 \rangle_B|^2 + |\langle -\Psi | \phi 2 \rangle_B|^2\}/4$$

$$= (1 + \sin\theta) / 2$$



次にアリスの状態をUnitary変換(条件有)したらどうなるか？

Unitary変換とは

$$|0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \qquad (|a|^2 + |b|^2 = 1)$$

Unitary変換した $|\phi 1\rangle_B$ ＝α(e｜00＞＋f｜10＞)＋β(g｜01＞＋h｜11＞)

Unitary変換した後の状態

$|\phi 1\rangle_A$＝α｜00＞＋β｜11＞

$|\phi 2\rangle_A$＝α｜00＞＋β exp(iϕ_C)｜11＞

$|\phi 1\rangle_B$＝α｜10＞＋β exp(iϕ_A)｜01＞

$|\phi 2\rangle_B$＝α｜10＞＋β exp(iϕ_B)｜01＞

Unitary変換した後の状態での成功確率Ｐ

$$P = \{|\langle \Psi | \phi 1 \rangle_A|^2 + |\langle -\Psi | \phi 2 \rangle_A|^2\}/4$$

$$+\{|\langle \Psi | \phi 1 \rangle_B|^2 + |\langle -\Psi | \phi 2 \rangle_B|^2\}/4$$

$$=(1+\sin\theta*(1-\cos\phi_C)^{\frac{1}{2}}/2^{\frac{1}{2}})/4$$

$$+(1+\sin\theta*(1-\cos\phi_A - \phi_B)^{\frac{1}{2}}/2^{\frac{1}{2}})/4$$

ここでＰが最大になるときは

$\cos\phi_C$＝-1　　$\cos(\phi_A - \phi_B)$＝-1　　のとき

Ｐ＝(１＋sin θ)／２となるので、始めに説明した方法で

キュービットを変化させるのがもっとも簡単で最大確率を出す方法である

今までと違う条件でのsuperdense codingの説明

アリスが送るキュービットの状態を$|\phi 1\rangle_A$，$|\phi 2\rangle_A$とする

ボブが答える結果は３通りで

Ｅ１；$|\phi 1\rangle_A$が送られてきた　　Ｅ２；$|\phi 2\rangle_A$が送られてきた

Ｅ３；わからない

この場合Ｅ３が最小になれば成功確率は最大になるＥ３の最小確率は$|\langle\phi 1|\phi 1\rangle|$

全体での最大確率は１-$|\langle\phi 1|\phi 1\rangle|$

この方法を用いて$\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle$の成功確率を求める

P＝1-｜cos θ ｜

理論上最大送れる情報量Ｈとの比較

H＝1-$|\alpha|^2 log_2 |\alpha|^2$ -$|\beta|^2 log_2 |\beta|^2$

前のページで作った最大確率から求める情報量H_A

成功確率をＰとする

１回目で成功したら　p*2

２回目で成功したら　(p-1)*p*3/2

３回目で成功したら　$(p-1)^2 * p * 4/3$

n回目で成功したら　$(p-1)^{(n-1)} * p * (n+1)/n$となるので

$H_A = \Sigma_{n=1}^{t}(p-1)^{(n-1)} * p * (n+1)/n$　　(t=∞)

理論上最大送れる情報量Ｈとの比較(グラフ)