

問題1 角運動量 $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の x -成分、 y -成分、 z -成分を、それぞれ ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z とするとき、それらの成分を位置ベクトル \mathbf{r} の成分 (x, y, z) と運動量 \mathbf{p} の成分 (p_x, p_y, p_z) で表せ。(25点)

問題2 r を位置ベクトル \mathbf{r} の大きさとするとき、次の等式を証明せよ。(25点)

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \quad (r \neq 0).$$

問題3 発散定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

において、体積 V を半径 a の球、ベクトル \mathbf{A} を位置ベクトル \mathbf{r} とするとき、左辺と右辺をそれぞれ計算し、その値を求めよ。(25点)

問題4 ストークスの定理

$$\int_S [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}] \, dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

において、 $\mathbf{A} = \nabla\phi(x, y, z)$ (ϕ はスカラー関数) のとき、上式の値は曲面 S によらない。左辺と右辺をそれぞれ計算し、その値を求めよ。(25点)