

Error marginのある量子状態の識別問題

2010年2月

福井大学大学院 工学研究科 物理工学専攻

平成20年度入学

08780048

杉本 宏行

目次

序章	2
第1章 導入	3
1.1 qubit	3
1.2 POVM 測定	5
第2章 二つの純粋状態の識別問題	7
2.1 Minimum-error discrimination	7
2.2 Unambiguous discrimination	10
第3章 Error margin を持つ二つの純粋状態の識別問題	15
3.1 Error margin を持つ識別問題の定式化について	15
3.2 Intermediate 領域	18
3.3 Single-state 領域	24
3.4 Weak error-margin condition と Strong error-margin condtion	27
3.5 最適な識別成功確率	30
第4章 結論	34
参考文献	36
謝辞	37
付録A 2次元の Hermite 演算子	38

序章

量子情報理論において様々な状況での量子状態を識別することは最も基本的で重要である。しかしながら、量子状態を識別するということは極めて非自明な問題である。これは、量子測定が実際は統計的で、測定された系は一般に壊れてしまうからである。

量子状態識別 [1] はそのような問題の一つである。まず、未知の量子状態 ρ が与えられる。それは、ある発生確率に従う既知の量子状態の集合 $\{\rho_a\}$ から選ばれていることはわかっている。与えられた状態 ρ に対して”ある測定”を行い、その測定結果から ρ が $\{\rho_a\}$ のどれに等しいかを推定するというのが量子状態の識別問題である。このような量子状態の識別問題を考える際、一般に二つの設定が研究されている。一つは、識別が間違えてもよいことにして識別成功確率を最大にする。これは結果的に識別が間違える確率を最小にするので minimum-error discrimination と呼ばれる [2]。もう一つは、unambiguous discrimination と呼ばれ、識別に間違いは許されない。その代わり識別が成功する可能性がない場合に”わからない”と言ってよいことになっている [3],[4],[5],[6]。

本研究では、識別が間違える確率に対して error margin m を越えてはならないという条件の下で識別成功確率を最大化する問題を考察する。unambiguous discrimination は $m = 0$ の場合に対応しており、一方、minimum-error discrimination は $m = 1$ の場合に対応しているのは明らかである。error margin を操作することで、この問題は minimum-error discrimination と unambiguous discrimination を連続的に補間する問題となる。Touzel, Adamson, Steinburg は、この問題で射影測定と POVM 測定の数値的結果を比較した [7]。また、以前の研究で、等しい発生確率を持つ二つの純粋状態の error margin のある識別問題を分析し、閉じた解析的な形式で最適な識別成功確率を得ている [8]。この論文では、二つの純粋状態の発生確率を一般の場合へ拡張し、最適な識別成功確率を求める。また、識別が間違える確率に対する error margin には二つのタイプを考えることができる。一つは、識別が間違える平均確率に対する制限で、weak error-margin condition と呼ぶ。もう一つは、条件付き間違い確率に対する制限で、strong error-margin condition と呼ぶ。この二つの制限のタイプの識別成功確率には”ある関係”があるので、その関係について証明を行う [9]。

まず、第1章では、導入として、量子情報分野の基本となる qubit の性質や POVM 測定についてまとめる。第2章では、量子状態識別では一般的な二つの設定である minimum-error discrimination と unambiguous discrimination を二つの純粋状態の場合について考察し、最適な識別成功確率を導出する。そして、第3章では、一般の発生確率を持つ二つの純粋状態の error margin のある識別問題を考察し、最適な識別成功確率を求める。また、weak error-margin condition と strong error-margin condition の最適な識別成功確率にある関係を証明する。

第1章 導入

ここでは、量子状態の識別問題を考える前に、導入として、量子情報分野の基本となる qubit や POVM 測定についてまとめる。

1.1 qubit

qubit(量子ビットとも呼ばれる)は量子情報と量子計算の基本概念であり、古典情報や古典計算などに用いられる従来の古典ビット (bit) にはない興味深い性質がある。古典ビットでは $|0\rangle$ か $|1\rangle$ かのどちらかの状態しかとることができない。しかし、qubit は量子力学的性質をもつので、 $|0\rangle$ や $|1\rangle$ だけでなくそれ以外の状態もとることができ。つまり、重ね合わせの状態をとることができる。

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

ここで、 α と β は一般に複素数である。この qubit を測定すると、確率 $|\alpha|^2$ で $|0\rangle$ 、または確率 $|\beta|^2$ で $|1\rangle$ が現れる。全確率の和は 1 であるから

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.2)$$

でなければならないことは明らかである。これは qubit の状態が長さ 1 に規格化される条件である。

また、単一 qubit を表現するのに有用な方法がある。(1.1) 式は (1.2) 式によって規格化されているので、次のように書き換えることができる。

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (1.3)$$

ここで、 θ, ϕ および γ は実数である。ただし、右辺の因子 $e^{i\gamma}$ は観測可能な効果をもたらさないので無視することができる。よって、状態 $|\psi\rangle$ は実効的に次のように書くことができる。

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (1.4)$$

図 1.1 に示すように θ と ϕ は 3 次元単位球面上の点を定義する。この球面を Bloch 球と呼び、単一 qubit を視覚的にとらえるのに便利な方法である。単一 qubit に対する多くの操作は Bloch 球上の描像で記述される。しかし、Bloch 球は多 qubit に対しては簡単に一般化できないので注意しなければならない。

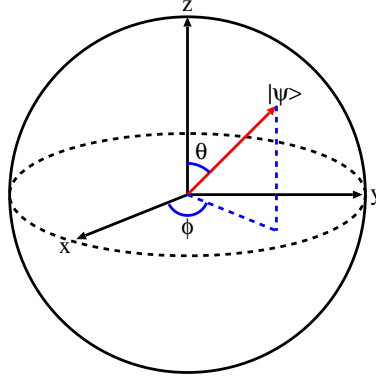


図 1.1: Bloch 球

この3次元単位球上の単位ベクトルを Bloch ベクトルと呼ぶ。一般に、Bloch ベクトル \mathbf{n} は次のように表される。

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (1.5)$$

また、Dirac の表記法を用いて、次のように表されることがある。

$$|\mathbf{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (1.6)$$

次に、この Bloch ベクトルを用いた二つの関係式を導く。一つは、qubit の内積公式である。

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{n} | \mathbf{n}' \rangle|^2 &= \left| \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \left(\cos \frac{\theta'}{2} \langle 0| + e^{i\phi'} \sin \frac{\theta'}{2} \langle 1| \right) \right|^2 \\ &= \left| \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \cos(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) - i \left(\sin(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \right) \\ &= \frac{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}{2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

もう一つは、qubit の外積公式である。

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| &= \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \langle 0| + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \langle 1| \right) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle \langle 0| + e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle \langle 1| + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \langle 0| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |1\rangle \langle 1| \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos \theta & (\cos \phi - i \sin \phi) \sin \theta \\ (\cos \phi + i \sin \phi) \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列である。

1.2 POVM 測定

POVM(Positive Operator-Valued Measure) 測定は、多くの人にとってあまり馴染みがないかもしれないが、測定の統計のみが重要である場合に、量子測定の見通しを得る簡単で直観的な方法として便利である。

状態 $|\psi\rangle$ にある量子系について、測定演算子 M_m で記述される測定を行うとする。測定結果 m を得る確率は $p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle$ で与えられる。次に、

$$E_m \equiv M_m^\dagger M_m \quad (1.9)$$

と定義する。 E_m は $\sum_m E_m = I$ および $p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle$ を満たす正の演算子である。したがって、演算子の集合 E_m があれば異なる測定結果の確率を決めることができる。演算子 E_m は測定に関する POVM 要素 (POVM element)、その完全集合である $\{E_m\}$ を POVM と呼ぶ。

POVM の例として測定演算子 P_m で記述される射影測定を考える。ここで、 P_m は $P_m P_{m'} = \delta_{mm'} P_m$ と $\sum_m P_m = I$ を満たす射影演算子である。この測定では、 $E_m \equiv P_m^\dagger P_m = P_m$ なので全 POVM 要素が測定演算子自身に等しい。したがって、POVM 測定は射影測定を含む広い測定であることがわかる。また、POVM 測定は測定する系に補助的な系を加えて、全系に対して射影測定しているという構造になっている。

ここで、POVM 測定がどのような場合に有効なのか、unambiguous discrimination の例を用いて見てみよう。まず、Alice が Bob に二つの状態 $|\psi_1\rangle = |0\rangle, |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ のどちらかに準備された qubit を与えるとする。Bob は与えられた状態に対して、次のような射影演算子で射影測定を行ったとしよう。

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \\ P_2 &\equiv 1 - P_1 \end{aligned}$$

unambiguous discrimination では識別に間違いは許されない。しかし、この射影測定では識別が間違える確率は $\langle \psi_1 | P_2 | \psi_1 \rangle = 0, \langle \psi_2 | P_1 | \psi_2 \rangle = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$ となる。射影測定では、測定演算子をうまく選んでも識別がこの間違える確率を同時にゼロにすることはできない。よって、射影測定では完全に信頼度よく状態を識別することは不可能である。

では、Bob が行う測定が POVM 測定ならどうなるか。次のような三つの POVM 要素を持つ POVM を考える。

$$E_1 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} \quad (1.10)$$

$$E_2 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |1\rangle\langle 1| \quad (1.11)$$

$$E_3 \equiv I - E_1 - E_2 \quad (1.12)$$

これらが $\sum_m E_m = I$ を満たす正の演算子であり、正当な POVM であることは明らかである。

Bobに状態 $|\psi_1\rangle$ が与えられたとすると、BobはPOVM $\{E_1, E_2, E_3\}$ で記述される測定を行う。 $\langle\psi_1|E_2|\psi_1\rangle=0$ となるように E_2 をうまく選んだので、 E_2 の結果を得る確率は0である。したがって、もし測定結果が E_2 ならば、Bobは受け取った状態は $|\psi_2\rangle$ であったと識別できる。同様に、もし測定結果が E_1 ならば、Bobが受け取った状態は $|\psi_1\rangle$ であったと識別できる。しかし、時には測定結果 E_3 を得るだろうが、このときは”わからない”と言えよ。このことから、”わからない”という推定を許容すれば絶対的な確実性を得ることができるというのがわかる。

しかし、このPOVMが状態を識別するのに最適とは言えないだろう。2.2節で unambiguous discrimination についての最適なPOVMを求める。

第2章 二つの純粋状態の識別問題

それぞれ一般の発生確率 η_1, η_2 を持つ二つの純粋状態 $\rho_1 = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|, \rho_2 = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$ の識別問題において、minimum-error discrimination と unambiguous discrimination の二つの設定で最適な識別成功確率を求める。

2.1 Minimum-error discrimination

識別が間違えてもよいことにして識別成功確率を最大にするのが minimum-error discrimination である。識別が間違えてもよい、つまり与えられた状態が ρ_1 なのに ρ_2 であると推定してもよいし、逆に与えられた状態が ρ_2 なのに ρ_1 であると推定してもよいことになる。したがって、次のような推定に対応する POVM 要素を持つ POVM 測定を行えばよい。

$$\begin{cases} E_1 : \rho \text{ は } \rho_1 \text{ である.} \\ E_2 : \rho \text{ は } \rho_2 \text{ である.} \end{cases}$$

ただし、POVM の完全性関係から $E_2 = 1 - E_1$ でなければならない。

識別が成功するという事は、与えられた状態が ρ_1 で ρ_1 であると推定した場合と与えられた状態が ρ_2 で ρ_2 であると推定した場合である。識別成功確率を P_m とすると次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} P_m &= \eta_1 \text{tr}[E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr}[E_2 \rho_2] \\ &= \eta_1 \text{tr}[E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr}[(1 - E_1) \rho_2] \end{aligned} \quad (2.1)$$

今、 $|\phi_1\rangle$ と $|\phi_2\rangle$ の張る二次元部分空間 V で考えているので、 ρ_1, ρ_2 は Bloch ベクトル $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \rho_1 = |\mathbf{n}_1\rangle\langle\mathbf{n}_1| \\ \rho_2 = |\mathbf{n}_2\rangle\langle\mathbf{n}_2| \end{cases}$$

また、(2.1) 式を Bloch ベクトルを用いると、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} P_m &= \eta_1 \text{tr}[E_1 |\mathbf{n}_1\rangle\langle\mathbf{n}_1|] + \eta_2 \text{tr}[(1 - E_1) |\mathbf{n}_2\rangle\langle\mathbf{n}_2|] \\ &= \eta_1 \langle\mathbf{n}_1|E_1|\mathbf{n}_1\rangle + \eta_2 \langle\mathbf{n}_2|(1 - E_1)|\mathbf{n}_2\rangle \\ &= \eta_2 + \eta_1 \langle\mathbf{n}_1|E_1|\mathbf{n}_1\rangle - \eta_2 \langle\mathbf{n}_2|E_1|\mathbf{n}_2\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで、POVM 要素 E_1, E_2 は 2次元部分空間 V 上の Hermite 演算子であるのでパウリ行列を用いて、それぞれ次のように表すことができる。

$$\begin{cases} E_1 = \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ E_2 = 1 - E_1 = 1 - \alpha - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{cases}$$

よって、(2.2) 式は

$$\begin{aligned} P_m &= \eta_2 + \eta_1 \langle \mathbf{n}_1 | (\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) | \mathbf{n}_1 \rangle - \eta_2 \langle \mathbf{n}_2 | (\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) | \mathbf{n}_2 \rangle \\ &= \eta_2 + \eta_1 (\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \langle \mathbf{n}_1 | \boldsymbol{\sigma} | \mathbf{n}_1 \rangle) - \eta_2 (\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \langle \mathbf{n}_2 | \boldsymbol{\sigma} | \mathbf{n}_2 \rangle) \\ &= \eta_2 + \eta_1 (\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1) - \eta_2 (\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2) \\ &= \eta_2 + (\eta_1 - \eta_2) \alpha + (\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2) \cdot \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ここで、(2.3) 式にシュワルツの不等式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ を適用すると

$$P_m \leq \eta_2 + (\eta_1 - \eta_2) \alpha + |\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \quad (2.4)$$

となる。

(2.4) 式から識別成功確率 P_m を最大にするためには

$$A = (\eta_1 - \eta_2) \alpha + |\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \quad (2.5)$$

を最大にする $\alpha, |\boldsymbol{\beta}|$ を求めればよい。 A を α について整理すると

$$\alpha = -\frac{|\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2|}{\eta_1 - \eta_2} |\boldsymbol{\beta}| + \frac{A}{\eta_1 - \eta_2} \quad (2.6)$$

となる。

また、POVM 要素の固有値は正であるという条件から

$$\begin{cases} \alpha \pm |\boldsymbol{\beta}| \geq 0 \\ 1 - (\alpha \pm |\boldsymbol{\beta}|) \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つので、少なくとも次の条件を満たさなければならない。

$$\begin{cases} \alpha - |\boldsymbol{\beta}| \geq 0 \\ 1 - \alpha - |\boldsymbol{\beta}| \geq 0 \end{cases}$$

このことから α は次のような条件を満たさなければならない。

$$|\boldsymbol{\beta}| \leq \alpha \leq 1 - |\boldsymbol{\beta}| \quad (2.7)$$

(2.7) 式の満たす範囲は図 2.1 の斜線部である。この範囲内で A が最大となるのは (2.6) 式が点 $(|\boldsymbol{\beta}|, \alpha) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を通るときである。また、 $\boldsymbol{\beta}$ の向きはベクトル $\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2$ と同じである。

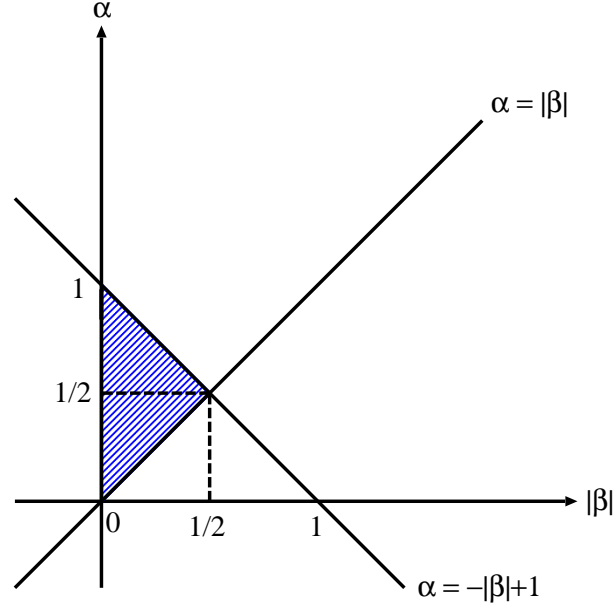


図 2.1: 条件式 (2.7) の範囲

よって、識別成功確率 P_m は

$$\begin{aligned}
 P_m &= \eta_2 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} + \frac{|\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2|}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{(\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{(\eta_1 + \eta_2)^2 - 2\eta_1 \eta_2 (1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 \left(\frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \right)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle|^2} \right)
 \end{aligned}$$

となる。

ここで、Bloch ベクトルを量子状態 $|\phi\rangle$ で書き直すと

$$P_m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2} \right) \quad (2.8)$$

となる。また、最適な POVM 要素は

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(\eta_1 |\phi_1\rangle\langle \phi_1| - \eta_2 |\phi_2\rangle\langle \phi_2|) - (\eta_1 - \eta_2)}{\sqrt{1 - 4\eta_1 \eta_2 |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2}} \right) \\ E_2 = 1 - E_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

となる。

2.2 Unambiguous discrimination

unambiguous discrimination では識別に間違いは許されない。その代わりに、識別が成功する可能性がない場合に”わからない”と言うことができる。したがって、次のような推定に対応する POVM 要素を持つ POVM 測定を行えばよい。

$$\begin{cases} E_1 : \rho \text{ は } \rho_1 \text{ である.} \\ E_2 : \rho \text{ は } \rho_2 \text{ である.} \\ E_3 : \text{ ”わからない”} \end{cases}$$

ただし、POVM の完全性関係から $E_3 = 1 - (E_1 + E_2)$ でなければならない。

識別成功確率を P_u とすると次のように書ける。

$$P_u = \eta_1 \text{tr}[E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr}[E_2 \rho_2] \quad (2.10)$$

ここで、unambiguous discrimination では識別が間違えてはならない。つまり、与えられた状態が ρ_1 で ρ_2 であると推定する確率 $P_{\rho_1|E_2}$ と与えられた状態が ρ_2 で ρ_1 であると推定する確率 $P_{\rho_2|E_1}$ がゼロでなければならない。

$$\begin{cases} P_{\rho_1|E_2} = \frac{P_{E_2, \rho_1}}{P_{E_2}} = \frac{P_{E_2, \rho_1}}{P_{E_2, \rho_1} + P_{E_2, \rho_2}} = \frac{\eta_1 \text{tr}[E_2 \rho_1]}{\eta_1 \text{tr}[E_2 \rho_1] + \eta_2 \text{tr}[E_2 \rho_2]} = 0 \\ P_{\rho_2|E_1} = \frac{P_{E_1, \rho_2}}{P_{E_1}} = \frac{P_{E_1, \rho_2}}{P_{E_1, \rho_1} + P_{E_1, \rho_2}} = \frac{\eta_2 \text{tr}[E_1 \rho_2]}{\eta_1 \text{tr}[E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr}[E_1 \rho_2]} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

今、 $|\phi_1\rangle$ と $|\phi_2\rangle$ の張る二次元部分空間で考えているので、 ρ_1, ρ_2 は Bloch ベクトル $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \rho_1 = |\mathbf{n}_1\rangle\langle\mathbf{n}_1| \\ \rho_2 = |\mathbf{n}_2\rangle\langle\mathbf{n}_2| \end{cases}$$

よって、(2.10) 式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} P_u &= \eta_1 \text{tr}[E_1 |\mathbf{n}_1\rangle\langle\mathbf{n}_1|] + \eta_2 \text{tr}[E_2 |\mathbf{n}_2\rangle\langle\mathbf{n}_2|] \\ &= \eta_1 \langle\mathbf{n}_1|E_1|\mathbf{n}_1\rangle + \eta_2 \langle\mathbf{n}_2|E_2|\mathbf{n}_2\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

また、(2.11) 式は、

$$\begin{cases} P_{\rho_1|E_2} = \frac{\eta_1 \langle\mathbf{n}_1|E_2|\mathbf{n}_1\rangle}{\eta_1 \langle\mathbf{n}_1|E_2|\mathbf{n}_1\rangle + \eta_2 \langle\mathbf{n}_2|E_2|\mathbf{n}_2\rangle} = 0 \\ P_{\rho_2|E_1} = \frac{\eta_2 \langle\mathbf{n}_2|E_1|\mathbf{n}_2\rangle}{\eta_1 \langle\mathbf{n}_1|E_1|\mathbf{n}_1\rangle + \eta_2 \langle\mathbf{n}_2|E_1|\mathbf{n}_2\rangle} = 0 \end{cases}$$

となる。よって、識別が間違えてはならないという条件は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \langle\mathbf{n}_1|E_2|\mathbf{n}_1\rangle = 0 \\ \langle\mathbf{n}_2|E_1|\mathbf{n}_2\rangle = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

ここで、POVM 要素 E_1, E_2, E_3 はパウリ行列を用いて、それぞれ次のように表すことができる。

$$\begin{cases} E_1 = \alpha_1 + \beta_1 \cdot \sigma \\ E_2 = \alpha_2 + \beta_2 \cdot \sigma \\ E_3 = 1 - (E_1 + E_2) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) \cdot \sigma \end{cases}$$

よって、(2.12) 式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
P_u &= \eta_1 \langle \mathbf{n}_1 | (\alpha_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}) | \mathbf{n}_1 \rangle + \eta_2 \langle \mathbf{n}_2 | (\alpha_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}) | \mathbf{n}_2 \rangle \\
&= \eta_1 (\alpha_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \langle \mathbf{n}_1 | \boldsymbol{\sigma} | \mathbf{n}_1 \rangle) + \eta_2 (\alpha_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \langle \mathbf{n}_2 | \boldsymbol{\sigma} | \mathbf{n}_2 \rangle) \\
&= \eta_1 (\alpha_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{n}_1) + \eta_2 (\alpha_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \mathbf{n}_2)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

また、(2.13) 式は

$$\begin{cases} \alpha_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \\ \alpha_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

となる。

ここで、POVM 要素 E_1, E_2 の固有値は正という条件から

$$\begin{cases} \alpha_1 \pm |\boldsymbol{\beta}_1| \geq 0 \\ \alpha_2 \pm |\boldsymbol{\beta}_2| \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つので、少なくとも次の条件を満たさなければならない。

$$\begin{cases} \alpha_1 - |\boldsymbol{\beta}_1| \geq 0 \\ \alpha_2 - |\boldsymbol{\beta}_2| \geq 0 \end{cases}$$

また、(2.15) 式にシュワルツの不等式を適用すると

$$\begin{cases} \alpha_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \geq \alpha_1 - |\boldsymbol{\beta}_1| \\ \alpha_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \geq \alpha_2 - |\boldsymbol{\beta}_2| \end{cases}$$

となる。この不等式から次の関係が成り立つのは明らかである。

$$\begin{cases} \alpha_1 = |\boldsymbol{\beta}_1| \\ \alpha_2 = |\boldsymbol{\beta}_2| \end{cases}$$

このことから $\boldsymbol{\beta}_1$ の向きは \mathbf{n}_2 と直交する向きで、 $\boldsymbol{\beta}_2$ の向きは \mathbf{n}_1 と直交する向きであることがわかる。

以上から、ベクトル $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ は $\alpha_1, \alpha_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ を用いて表すことができる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = -\alpha_1 \mathbf{n}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 = -\alpha_2 \mathbf{n}_1 \end{cases} \tag{2.16}$$

(2.16) 式を (2.14) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
P_u &= \eta_1 (\alpha_1 + (-\alpha_1 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_1) + \eta_2 (\alpha_2 + (-\alpha_2 \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_2) \\
&= \eta_1 \alpha_1 (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) + \eta_2 (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \\
&= (\eta_1 \alpha_1 + \eta_2 \alpha_2) (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。

識別成功確率 P_u を最大にするためには次の A' を最大にする α_1, α_2 を求めればよい。

$$A' = \eta_1 \alpha_1 + \eta_2 \alpha_2 \quad (2.18)$$

A' を α_2 について整理すると

$$\alpha_2 = -\frac{\eta_1}{\eta_2} \alpha_1 + \frac{A'}{\eta_2} \quad (2.19)$$

ここで、POVM 要素 E_3 の固有値は正という条件から

$$1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \pm |\beta_1 + \beta_2| \geq 0$$

が成り立つので、少なくとも次の条件を満たさなければならない。

$$1 - (\alpha_1 + \alpha_2) - |\beta_1 + \beta_2| \geq 0$$

この式に (2.16) 式を代入すると

$$1 - (\alpha_1 + \alpha_2) - |-(\alpha_1 \mathbf{n}_2 + \alpha_2 \mathbf{n}_1)| \geq 0$$

となる。第三項を右辺に移項し、両辺を二乗すると

$$1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_1\alpha_2(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \geq 0 \quad (2.20)$$

となる。ただし、

$$1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0 \quad (2.21)$$

を満たさなければならない。

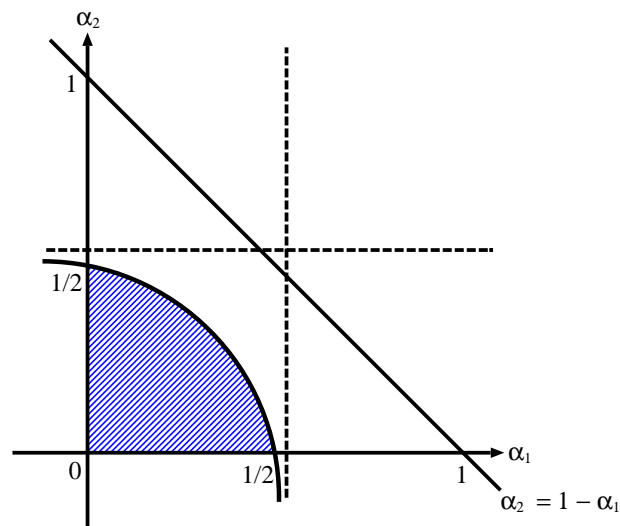


図 2.2: 条件式 (2.20), (2.21) の範囲

また、(2.20) 式は双曲線の方程式であり、(2.20),(2.21) 式の満たす範囲は図 2.2 の斜線部である。この範囲内で (2.18) 式が最大となるのは (2.19) 式の傾きが双曲線 (2.20) 式の傾きと一致するときである。

(2.20) 式を α_2 について整理すると

$$\alpha_2 = \frac{2\alpha_1 - 1}{2\{(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\alpha_1 - 1\}} \quad (2.22)$$

となる。今、傾きを求めたいので α_1 で微分すると

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -\frac{(1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{2\{(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\alpha_1 - 1\}^2} \quad (2.23)$$

となる。この傾きが (2.19) 式の傾き $-\frac{\eta_1}{\eta_2}$ と等しければよいので

$$-\frac{\eta_1}{\eta_2} = -\frac{(1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{2\{(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\alpha_1 - 1\}^2} \quad (2.24)$$

となる。整理すると

$$2\eta_1(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 \alpha_1^2 - 4\eta_1(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\alpha_1 + 2\eta_1 - \eta_2(1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0 \quad (2.25)$$

これは α_1 についての二次方程式である。二次方程式の解の公式を用いて α_1 を求める。

$$\alpha_1 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}}}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}$$

ここで図 2.2 から α_1 は $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}$ なので、これを満たす α_1 は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}}}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}} |\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle|}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。次に、(2.26) 式を (2.22) 式に代入して α_2 を求める。

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2}}}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} |\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle|}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

求めた α_1, α_2 を (2.18) 式に代入すると

$$A' = \frac{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2} |\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle|}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2} \quad (2.28)$$

となる。よって、識別成功確率 P_u は

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2} |\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle|}{1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2} (1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \\ &= 1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2} |\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle| \end{aligned}$$

となる。

ここで、Bloch ベクトルを量子状態 $|\phi\rangle$ で書き直すと

$$P_u = 1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2}|\langle\phi_1|\phi_2\rangle| \quad (2.29)$$

となる。

しかし、 $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ でなければならないという条件があった。このことから次のような3つの場合に分けられる。

$$(i) \frac{1}{|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2} \leq \frac{\eta_2}{\eta_1} \text{ のとき}$$

$$P_u = \eta_2(1 - |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2)$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(ii) |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 < \frac{\eta_2}{\eta_1} < \frac{1}{|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2} \text{ のとき}$$

$$P_u = 1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2}|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|}{2(1 - |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2)} \\ \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|}{2(1 - |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2)} \end{cases}$$

$$(iii) \frac{\eta_2}{\eta_1} \leq |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 \text{ のとき}$$

$$P_u = \eta_1(1 - |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2)$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

第3章 Error marginを持つ二つの純粋状態の識別問題

識別が間違ふ確率に対して error margin m を課した二つの純粋状態の識別問題を考察し、SDP(Semidefinite programming) の手法を用いて、定式化を行い、最大識別成功確率を解析的に求める。また、識別が間違ふ確率に対する error margin には二つのタイプが考えられる。この二つのタイプの最適な識別成功確率にある関係を証明する。

3.1 Error margin を持つ識別問題の定式化について

それぞれ発生確率が η_1, η_2 の二つの純粋状態 $\rho_1 = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|, \rho_2 = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$ の識別問題を考える。自明な特別な場合を除いて、 $\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0$ を想定する。二つの状態 ρ_1, ρ_2 は線形独立で、それらの二つの状態によって張られる2次元部分空間 V で作用していることも想定している。測定は V 上の POVM によって記述され、3つの要素 $\{E_\mu\}_{\mu=1}^3$ で構成されている。 $\mu = 1$ or 2 によって分類される測定結果は与えられた状態が状態 ρ_μ であると推定されることを意味する。要素 E_3 は結論の出ない結果すなわち”わからない”という結果を意味する。

今、与えられた状態が ρ_a ($a = 1, 2$) で測定結果が μ である joint probability は P_{ρ_a, E_μ} によって記述され、確率 P_{ρ_a, E_μ} は次のように与えられる。

$$P_{\rho_a, E_\mu} = \eta_a \text{tr} [E_\mu \rho_a]$$

よって、識別成功確率 P_o と平均の間違い確率 P_x は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} P_o &\equiv P_{\rho_1, E_1} + P_{\rho_2, E_2} \\ &= \eta_1 \text{tr} [E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr} [E_2 \rho_2] \\ P_x &\equiv P_{\rho_1, E_2} + P_{\rho_2, E_1} \\ &= \eta_1 \text{tr} [E_2 \rho_1] + \eta_2 \text{tr} [E_1 \rho_2] \end{aligned}$$

本研究の目的は、この平均の間違い確率 P_x にある error margin m ($0 \leq m \leq 1$) を越えてはいけないという条件を課し、識別成功確率 P_o を最大にすることである。

今、考えている識別問題は次のように定式化できる。

maximize:

$$P_o = \eta_1 \text{tr} [E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr} [E_2 \rho_2] \quad (3.1)$$

subject to:

$$E_1 \geq 0, E_2 \geq 0, E_3 \geq 0 \quad (3.2)$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = 1 \quad (3.3)$$

$$P_x = \eta_1 \text{tr} [E_2 \rho_1] + \eta_2 \text{tr} [E_1 \rho_2] \leq m \quad (3.4)$$

ここで、(3.2),(3.3) 式は、POVM に対して満たされる条件である。

このような識別問題は semidefinite programming(SDP) の一つとして定式化することができる [10],[11],[12]。SDP の一般定理によると、最適な POVM に対する必要十分条件が書くことができ、それらが目的に対して十分条件であることがわかる。

また、次のような条件を満たす空間 V 上に作用する Hermite 演算子 Y 、実数 y が存在するとする。

$$Y \geq 0 \quad (3.5)$$

$$Y \geq \eta_1 \rho_1 - y \eta_2 \rho_2 \quad (3.6)$$

$$Y \geq \eta_2 \rho_2 - y \eta_1 \rho_1 \quad (3.7)$$

$$y \geq 0 \quad (3.8)$$

そして、次式で d を定義する。

$$d \equiv \text{tr} [Y] + my \quad (3.9)$$

(3.9) 式が識別成功確率 P_o に対して上限を与えることは次の証明で簡単にわかる。

$$\begin{aligned} P_o &= \eta_1 \text{tr} [E_1 \rho_1] + \eta_2 \text{tr} [E_2 \rho_2] \\ &\leq \text{tr} [E_1 (Y + y \eta_2 \rho_2)] + \text{tr} [E_2 (Y + y \eta_1 \rho_1)] \\ &= \text{tr} [(E_1 + E_2) Y] + y P_x \\ &\leq \text{tr} [Y] + my = d \end{aligned}$$

この上限は次のような関係が成り立つ場合にのみ達成されることは明らかである。

$$E_1 (Y - (\eta_1 \rho_1 - y \eta_2 \rho_2)) = 0 \quad (3.10)$$

$$E_2 (Y - (\eta_2 \rho_2 - y \eta_1 \rho_1)) = 0 \quad (3.11)$$

$$E_3 Y = 0 \quad (3.12)$$

$$y (m - P_x) = 0 \quad (3.13)$$

条件式 (3.5),(3.6),(3.7),(3.8) の下での d の最小化は双対問題と呼ばれる。一方、最初の問題である条件式 (3.2),(3.3),(3.4) の下での P_o の最大化は主問題と呼ぶ。

初めに最適な POVM 要素の rank をみていくことにする。まず、 E_3 の rank を 2 とする。(3.12) 式から $Y = 0$ でなければならない。そして、(3.6),(3.7) 式から

$$\begin{aligned} y\eta_2\rho_2 &\geq \eta_1\rho_1 \\ y\eta_1\rho_1 &\geq \eta_2\rho_2 \end{aligned}$$

である。ここで、 $|\phi_1\rangle$ に直交する $|\phi_1^\perp\rangle$ 、 $|\phi_2\rangle$ に直交する $|\phi_2^\perp\rangle$ を定義する。 $|\phi_2^\perp\rangle, |\phi_1^\perp\rangle$ でそれぞれはさむと

$$\begin{aligned} 0 &\geq \eta_1 \left| \langle \phi_2^\perp | \phi_1 \rangle \right|^2 \\ 0 &\geq \eta_2 \left| \langle \phi_1^\perp | \phi_2 \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

となる。しかし、 $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$ であり、今 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ によって張られる二次元部分空間 V を考えているので $|\phi_1\rangle \sim |\phi_2\rangle$ であることは明らかである。これは $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ が線形独立であることに矛盾する。

次に、 E_1 の rank を 2 とする。(3.10) 式から $Y = \eta_1\rho_1 - y\eta_2\rho_2$ を得る。そして、(3.5),(3.7) 式から

$$\begin{aligned} \eta_1\rho_1 &\geq y\eta_2\rho_2 \\ \eta_1\rho_1 &\geq \eta_2\rho_2 \end{aligned}$$

である。ここで、 $|\phi_1^\perp\rangle$ でそれぞれはさむと

$$\begin{aligned} 0 &\geq y\eta_2 \left| \langle \phi_1^\perp | \phi_2 \rangle \right|^2 \\ 0 &\geq \eta_2 \left| \langle \phi_1^\perp | \phi_2 \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

となる。これは、 $\eta_2 \neq 0$ と $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ が線形独立であることに矛盾する。 E_2 の rank を 2 とする場合も同様に考えることができる。以上から、最適な POVM 要素の rank は多くても 1 であることがわかった。また、測定には三つのタイプがあり、それらは発生確率と error margin のパラメータ空間の領域に依存し最適になる。この分類は最適な POVM 要素の rank によってなされる。minimum-error 領域では最適な POVM は minimum-error discrimination のそれであり、 $E_3 = 0$ であると同時に E_1, E_2 の rank は 1 である。single-state 領域では最適な測定は、二つの状態のどちらか一つを除外して二つの結果だけを生み出す。この場合 E_1, E_2 のどちらかはゼロで残る二つの POVM 要素は rank が 1 である。intermediate 領域はすべての POVM 要素の rank は 1 で三つの結果を得る確率はゼロではない。

一般性の損失なしに $\eta_1 \leq \eta_2$ を想定し、intermediate 領域、single-state 領域の最適な識別成功確率を求める。また、より簡単な表現にするために次のような定義をする。

$$S \equiv \left| \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \right|^2 \quad (3.14)$$

$$T \equiv 1 - \left| \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \right|^2 \quad (3.15)$$

3.2 Intermediate 領域

Intermediate 領域では、すべての POVM 要素 E_1, E_2, E_3 はゼロでなく、rank は 1 である。(3.10),(3.11),(3.12) 式によって与えられた条件は次のように定義された rank が少なくとも 1 である演算子 Y_1, Y_2 を必要とする。

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv Y - (\eta_1 \rho_1 - y \eta_2 \rho_2) \\ Y_2 &\equiv Y - (\eta_2 \rho_2 - y \eta_1 \rho_1) \end{aligned}$$

Y の rank も少なくとも 1 である。

ここで、 V 上に作用するその他の演算子や状態 ρ_a に対して Bloch ベクトル表示を用いると便利である。

$$\rho_a = \frac{1 + \mathbf{n}_a \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (a = 1, 2)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列である。また、演算子 Y は次のように書ける。

$$Y = \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

よって、 Y_1, Y_2 は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha - \frac{\eta_1 - y \eta_2}{2} + \left(\boldsymbol{\beta} - \frac{\mathbf{a}_1}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ Y_2 &= \alpha - \frac{\eta_2 - y \eta_1}{2} + \left(\boldsymbol{\beta} - \frac{\mathbf{a}_2}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

ここでは、次のように定義されたベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を導入した。

$$\mathbf{a}_1 = \eta_1 \mathbf{n}_1 - y \eta_2 \mathbf{n}_2 \quad (3.16)$$

$$\mathbf{a}_2 = \eta_2 \mathbf{n}_2 - y \eta_1 \mathbf{n}_1 \quad (3.17)$$

演算子 Y_1, Y_2, Y の rank が 1 であることから小さい方の固有値はすべてゼロなので、次のような α と $\boldsymbol{\beta}$ に対する 3 つの方程式を得る。

$$\alpha - \frac{\eta_1 - y \eta_2}{2} = \left| \boldsymbol{\beta} - \frac{\mathbf{a}_1}{2} \right| \quad (3.18)$$

$$\alpha - \frac{\eta_2 - y \eta_1}{2} = \left| \boldsymbol{\beta} - \frac{\mathbf{a}_2}{2} \right| \quad (3.19)$$

$$\alpha = |\boldsymbol{\beta}| \quad (3.20)$$

この 3 つの方程式から次のような 2 つの方程式が得られることは簡単にわかる。

$$|\boldsymbol{\beta}| = \frac{\eta_1 - y \eta_2}{2} + \left| \boldsymbol{\beta} - \frac{\eta_1 \mathbf{n}_1 - y \eta_2 \mathbf{n}_2}{2} \right| \quad (3.21)$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = \frac{\eta_2 - y \eta_1}{2} + \left| \boldsymbol{\beta} - \frac{\eta_2 \mathbf{n}_2 - y \eta_1 \mathbf{n}_1}{2} \right| \quad (3.22)$$

上の 2 つの方程式の両辺を二乗して整理すると

$$(\eta_1 \mathbf{n}_1 - y \eta_2 \mathbf{n}_2) \cdot \boldsymbol{\beta} - (\eta_1 - y \eta_2) |\boldsymbol{\beta}| = y \eta_1 \eta_2 T \quad (3.23)$$

$$(\eta_2 \mathbf{n}_2 - y \eta_1 \mathbf{n}_1) \cdot \boldsymbol{\beta} - (\eta_2 - y \eta_1) |\boldsymbol{\beta}| = y \eta_1 \eta_2 T \quad (3.24)$$

となる。この2式の和と差は次のようになる。

$$|\beta| - (\eta_1 \mathbf{n}_1 + \eta_2 \mathbf{n}_2) \cdot \beta = \frac{2y\eta_1\eta_2 T}{y-1} \quad (3.25)$$

$$(\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2) \cdot \beta - (\eta_1 - \eta_2) |\beta| = 0 \quad (3.26)$$

(3.26) 式から

$$|\beta| = \frac{(\eta_1 \mathbf{n}_1 - \eta_2 \mathbf{n}_2) \cdot \beta}{(\eta_1 - \eta_2)} \quad (3.27)$$

である。この式を (3.25) 式に代入し、整理すると

$$(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \beta = \frac{y(\eta_1 - \eta_2) T}{y-1} \quad (3.28)$$

となる。ここで、 β は \mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 が張る平面上にあることから $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ を用いて次のように展開することができる。

$$\beta = C \frac{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{2} + D \frac{\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2}{2} \quad (3.29)$$

両辺に $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2$ を掛けると

$$(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \beta = 2DT \quad (3.30)$$

となる。この式と (3.28) 式から次のような関係が成り立つ。

$$2DT = \frac{y(\eta_1 - \eta_2) T}{y-1}$$

よって、係数 D は

$$D = \frac{y}{2(y-1)} (\eta_1 - \eta_2) \quad (3.31)$$

となる。また、係数 C については (3.26) 式に (3.29) 式を代入し、整理すると

$$CS + \frac{yT}{2(y-1)} = \sqrt{C^2 S + \frac{y^2 (\eta_1 - \eta_2)^2 T}{4(y-1)^2}} \quad (3.32)$$

となる。両辺二乗して整理すると

$$C^2 - \frac{y}{y-1} C + \frac{y^2}{4(y-1)^2} \left(1 - \frac{4\eta_1\eta_2}{S}\right) = 0 \quad (3.33)$$

となる。これは C の二次方程式であるから、二次方程式の解の公式を用いて C を求めることができる。よって、 C は

$$C = \frac{y}{2(y-1)} \pm \frac{y}{|y-1|} \sqrt{\frac{\eta_1\eta_2}{S}}$$

となる。しかし、パラメータ y は $y \geq 1$ を満たさなければならないので

$$C = \frac{y}{2(y-1)} \pm \frac{y}{y-1} \sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{S}}$$

となる。求めた C, D を (3.29) 式に代入し、整理すると

$$\beta = \frac{y}{2(y-1)} \left\{ \left(\eta_1 \pm \sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{S}} \right) \mathbf{n}_1 + \left(\eta_2 \pm \sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2}{S}} \right) \mathbf{n}_2 \right\} \quad (3.34)$$

となる。さらに、 α は次のように求められる。

$$\alpha = |\beta| = \frac{y}{2(y-1)} \left(1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S} \right) \quad (3.35)$$

いま、(3.5),(3.6),(3.7),(3.8) 式を満たす Y と y があるので、 $d = \text{tr}[Y] + ym$ を計算することにより識別成功確率の上限を求めることができる。

$$\begin{aligned} d &= \text{tr}[Y] + ym \\ &= 2\alpha + my \\ &= \frac{y}{y-1} \left(1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S} \right) + my \end{aligned} \quad (3.36)$$

上限 d は最小化されているのでパラメータ y は決まる。よって、 d と y は次のように求められる。

まず、(3.36) 式を y について微分する。

$$d' = m - \frac{1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}}{(y-1)^2}$$

d が最小となる y を求めたいので $d' = 0$ とし、 y について解くと

$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}}{m}}$$

となる。ここで、 $y \geq 1$ を満たさなければならない。よって、 y は

$$y = 1 + \sqrt{\frac{1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}}{m}} \quad (3.37)$$

となる。

次に、(3.36) 式を次のように変形する。

$$d = \left(1 + \frac{1}{y-1} \right) \left(1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S} \right) + m(y-1) + m$$

相加相乗平均の不等式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ を用いると

$$\begin{aligned} d &\geq 1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S} + 2\sqrt{\left(\frac{1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}}{y-1} \right) \cdot m(y-1) + m} \\ &= 1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S} + 2\sqrt{\left(1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S} \right) m + m} \\ &= \left(\sqrt{m} + \sqrt{1 \pm 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。\$d\$は最小化されているので、上の不等式は等号が成り立つ。よって、\$d\$は

$$d = \left(\sqrt{m} + \sqrt{1 \pm 2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}} \right)^2 \quad (3.38)$$

となる。\$d\$と\$y\$の複号に関して、より小さい上限を得るために負の符号をとり、それに対応して(3.34),(3.35)式の複号も負の符号をとる。

(3.10),(3.11),(3.12)式によって与えられた条件は POVM 要素 \$E_1, E_2, E_3\$ が次のような形をとることを要求する。

$$E_\mu = \gamma_\mu \left(|\beta_\mu\rangle\langle\beta_\mu| - \beta_\mu \cdot \sigma \right) \quad (\mu = 1, 2, 3)$$

ここで、\$\beta_\mu\$は次のように定義される。

$$\beta_1 \equiv \beta - \frac{1}{2}\mathbf{a}_1, \quad \beta_2 \equiv \beta - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2, \quad \beta_3 \equiv \beta$$

問題は集合 \$\{E_1, E_2, E_3\}\$ が (3.3) 式で与えられた POVM の完全性関係をなすので正の定数 \$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\$ がうまく選べるかどうかである。これは以下のように三つのベクトル \$\beta_1, \beta_2, \beta_3\$ に対して正の係数を持つ線形関係が存在するならば可能である。

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \geq 0)$$

もし、このような線形関係が存在するなら、\$\sum_\mu \gamma_\mu |\beta_\mu\rangle\langle\beta_\mu| = 1\$ なので係数 \$\gamma_\mu\$ はすべての正の因子 \$\gamma\$ が決まった \$\gamma_\mu = \gamma c_\mu\$ のように構成できる。

それぞれの三つのベクトルは Bloch ベクトル \$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\$ によって表されるので、すべての因子が一意的に決まった線形関係を見つけることができ、係数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y}{y+1} \left(\sqrt{m} - \frac{\sqrt{\eta_1\eta_2 S} - \eta_1}{\sqrt{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2}}} \right) \\ c_2 &= \frac{y}{y+1} \left(\sqrt{m} - \frac{\sqrt{\eta_1\eta_2 S} - \eta_2}{\sqrt{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2}}} \right) \\ c_3 &= \sqrt{\frac{\eta_1\eta_2 S}{m}} - \sqrt{m} - \sqrt{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}} \end{aligned}$$

ここで、\$c_\mu\$の符号は \$\eta_1, \eta_2, S\$ そして \$m\$ によって変化する。いま、\$\eta_1 \le \eta_2\$ を想定しているので、\$c_2\$ は常に正である。また、\$m \ge m'_c\$ ならば \$c_1\$ は正、\$m \le m_c\$ ならば \$c_3\$ は正である。\$m_c, m'_c\$ はそれぞれ (3.71),(3.56) 式によって定義される。したがって、集合 \$\{E_1, E_2, E_3\}\$ は error margin \$m\$ が \$m'_c \le m \le m_c\$ の範囲なら POVM である。

次に (3.4),(3.13) 式と \$y \ge 1\$ から \$P_\times = m\$ と変形することができる。\$P_\times = m\$ という関係が成り立つことは上で構成した POVM を用いて計算することで明白に証明できる。これは偶然の一致ではなく、パラメータ \$y\$ をどのように決定したかの結果である。パラメータ \$y\$ は (3.36) 式によって与えられた上限 \$d\$ が最小なので決めることができる。

$$\frac{\partial}{\partial y} d = \frac{\partial}{\partial y} \text{tr}[Y] + m = 0$$

上の式から $\frac{\partial}{\partial y} \text{tr}[Y] = -P_x$ となることが示せる。これは d の最小値が $P_x = m$ を導くことを意味している。これは次の方法で見ることができる。変数 y に依存し、 $A(y)B(y) = 0$ を満たす二つの半正定値演算子 $A(y), B(y)$ があるとすると、 $\text{tr}[A(y)B'(y)] = 0$ が示せる。これを示すために、次のような関数 $f(x)$ を定義する。

$$f(x) \equiv \text{tr}[A(y)B(y+x)]$$

任意の x に対して $f(x) \geq 0$ なら $f(0) = 0$ であり、 $x = 0$ で $f(x)$ は最小値を持つことを必要とする。 $f'(0) = 0$ であることから、いま演算子 Y_1, Y_2, Y と POVM 要素 E_μ はすべて半正定値で $E_1 Y_1 = E_2 Y_2 = E_3 Y = 0$ を満たしている。それゆえに、次のような関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \text{tr}[Y] &= \text{tr}\left[E_1 \frac{\partial Y}{\partial y}\right] + \text{tr}\left[E_2 \frac{\partial Y}{\partial y}\right] + \text{tr}\left[E_3 \frac{\partial Y}{\partial y}\right] \\ &= \text{tr}\left[E_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right] + \text{tr}\left[E_2 \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right] + \text{tr}\left[E_3 \frac{\partial Y}{\partial y}\right] - P_x \\ &= -P_x \end{aligned}$$

したがって、error margin m が $m'_c \leq m \leq m_c$ の範囲ならば (3.38) 式の上限は達成され、最適な識別成功確率は次のように求められる。

$$P_{\max} = \left(\sqrt{m} + \sqrt{1 - 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}} \right)^2 \quad (3.39)$$

最適な POVM を用いることによって、次のような対称性が成り立つことがわかる。

$$P_{\rho_2|E_1} = P_{\rho_1|E_2} \quad (3.40)$$

$$P_{\rho_1|E_3} = P_{\rho_2|E_3} \quad (3.41)$$

ここで、次のように定義された条件付き確率を導入する。

$$P_{\rho_a|E_\mu} \equiv \frac{P_{\rho_a, E_\mu}}{P_{E_\mu}}, \quad P_{E_\mu} \equiv P_{\rho_1, E_\mu} + P_{\rho_2, E_\mu}$$

一般の発生確率を持つ ρ_1 と ρ_2 との間に明白な対称性はないので、これは注目すべきことである。(3.40) 式で与えられた二つの条件付き間違い確率の対称性は後に重要になるので覚えておく。

これらの対称性がどのようにして現れたのかを明らかにするのに簡単な議論を述べる。次のような二つのベクトル C と X を定義する。

$$\begin{aligned} C &\equiv \left(\sqrt{P_{\rho_1, E_1}}, \sqrt{P_{\rho_2, E_2}} \right) \\ X &\equiv \left(\sqrt{P_{\rho_2, E_1}}, \sqrt{P_{\rho_2, E_2}} \right) \end{aligned}$$

そして識別成功確率 P_0 は $|C|^2$ によって与えられる。三角不等式を用いると次のようなことが言える。

$$\sqrt{P_0} = |C| \leq |X| + |C - X| \quad (3.42)$$

$|X| = \sqrt{P_x}$ であり、 \sqrt{m} を越えてはいけないことに注意する。 $|C - X|$ の上限は次のように決めることができる。

$$\begin{aligned}
|C - X|^2 &= C^2 + X^2 - 2C \cdot X \\
&= 1 - P_{\rho_1, E_3} - P_{\rho_2, E_3} - 2C \cdot X \\
&\leq 1 - 2 \left(\sqrt{P_{\rho_1, E_3} P_{\rho_2, E_3}} + C \cdot X \right) \\
&= 1 - 2\sqrt{\eta_1 \eta_2} \sum_{\mu=1}^3 \sqrt{q_{\mu}^{(1)} q_{\mu}^{(2)}}
\end{aligned}$$

ここで、相加相乗平均の不等式

$$P_{\rho_1, E_3} + P_{\rho_2, E_3} \geq 2\sqrt{P_{\rho_1, E_3} P_{\rho_2, E_3}} \quad (3.43)$$

を用いた。そして、二つの確率分布 $q_{\mu}^{(1)}$ と $q_{\mu}^{(2)}$ は次のように定義される。

$$q_{\mu}^{(a)} \equiv \text{tr} [\rho_a E_{\mu}] \quad (a = 1, 2, \mu = 1, 2, 3)$$

ここで、 $\sum_{\mu=1}^3 \sqrt{q_{\mu}^{(1)} q_{\mu}^{(2)}}$ は二つの状態 ρ_1 と ρ_2 に対する測定結果 μ を得る二つの古典的確率分布 $q_{\mu}^{(1)}$ と $q_{\mu}^{(2)}$ の忠実度である。この古典的忠実度は二つの状態の量子的忠実度 $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle| = \sqrt{S}$ によって下限であることが知られている。したがって、次のように識別成功確率 P の上限を得ることができる。

$$P_{\max} \leq \left(\sqrt{m} + \sqrt{1 - 2\sqrt{\eta_1 \eta_2} S} \right)^2$$

これは (3.39) 式によって与えられた到達可能な最大値であることがわかる。その結果、この上限を得るために用いた不等式すべてで等式が成り立たなければならない。それらのなかで、三角不等式 (3.42) の等号はベクトル C と X が同じ方向であることを必要とし、ただちに (3.40) 式の対称性が導かれる。相加相乗平均の不等式 (3.43) の等号は (3.41) 式の関係を要求する。

3.3 Single-state 領域

unambiguous discrimination で、もし発生確率が十分に小さければ、識別するために状態の一つを除外することは最適であった。一般の error margin を持つ識別問題でも、パラメータ (η_1 と m) の領域内で同じような状況が発生し、single-state 領域と呼ぶ。この節で、single-state 領域の最適な成功確率を求める。

$\eta_1 \leq \eta_2$ を想定しているので、 $E_1 = 0$ を持つ最適な POVM を探せばよい。すべての POVM 要素は多くて rank が 1 であるので、すぐに、 E_2, E_3 は決まった単位 Bloch ベクトル f を持つ正規直交状態 $|f\rangle, |-f\rangle$ の集合に関する射影測定を構成しなければならないことがわかる。

$$E_2 = |f\rangle\langle f| \quad (3.44)$$

$$E_3 = |-f\rangle\langle -f| \quad (3.45)$$

今、(3.10) 式は自明に満たされる。(3.11),(3.12) 式は次のようなことを要求する。

$$Y = \lambda_+ |f\rangle\langle f| \quad (3.46)$$

$$Y - (\eta_2 \rho_2 - y \eta_1 \rho_1) = -\lambda_- |-f\rangle\langle -f| \quad (3.47)$$

ここで λ_+, λ_- は定数であり、(3.5),(3.7) 式から $\lambda_+ \geq 0, \lambda_- \leq 0$ であることがわかる。

次に、上の 2 式から Y を消去すると

$$\eta_2 \rho_2 - y \eta_1 \rho_1 = \lambda_+ |f\rangle\langle f| + \lambda_- |-f\rangle\langle -f| \quad (3.48)$$

となる。これは演算子 $\eta_2 \rho_2 - y \eta_1 \rho_1$ のスペクトル分解で、 λ_+, λ_- は固有状態 $|f\rangle, |-f\rangle$ をそれぞれに持つ正と負の固有値であることを示す。したがって、 λ_+, λ_- 、そして f は Bloch ベクトル n_1, n_2 を用いて表すことができる。

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\eta_2 - y \eta_1) \pm \frac{1}{2} |\mathbf{a}_2| \quad (3.49)$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} \quad (3.50)$$

ここで、 $\mathbf{a}_2 = \eta_2 \mathbf{n}_2 - y \eta_1 \mathbf{n}_1$ は (3.17) 式で定義されている。

次にパラメータ y を決める。演算子 $Y - (\eta_1 \rho_1 - y \eta_2 \rho_2)$ を Bloch ベクトルを用いて書き換えると

$$\begin{aligned} Y - (\eta_1 \rho_1 - y \eta_2 \rho_2) &= \lambda_+ \frac{1 + \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \left\{ \eta_1 \left(\frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) - y \eta_2 \left(\frac{1 + \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda_+ - (\eta_1 - y \eta_2) + \left(\lambda_+ \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} - \mathbf{a}_1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbf{a}_1 = \eta_1 \mathbf{n}_1 - y \eta_2 \mathbf{n}_2, \mathbf{a}_2 = \eta_2 \mathbf{n}_2 - y \eta_1 \mathbf{n}_1$ である。(3.6) 式から演算子 $Y - (\eta_1 \rho_1 - y \eta_2 \rho_2)$ は正の演算子であるので、その固有値は正でなければならない。よって、

$$\lambda_+ - (\eta_1 - y \eta_2) \geq \left| \lambda_+ \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} - \mathbf{a}_1 \right| \quad (3.51)$$

となる。両辺二乗して整理すると

$$(\eta_1 - y\eta_2)^2 - 2\lambda_+(\eta_1 - y\eta_2) \geq \mathbf{a}_1^2 - 2\lambda_+ \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|}$$

となる。ただし、 $\lambda_+ - (\eta_1 - y\eta_2) \geq 0$ でなければならない。

ここで、 $\mathbf{a}_1 = \eta_1 \mathbf{n}_1 - y\eta_2 \mathbf{n}_2$, $\mathbf{a}_2 = \eta_2 \mathbf{n}_2 - y\eta_1 \mathbf{n}_1$, $\lambda_+ = \frac{1}{2}(\eta_2 - y\eta_1 + |\mathbf{a}_2|)$ であるから、それぞれ代入して整理すると

$$(y-1)(\eta_2 + y\eta_1) \geq (y+1)\sqrt{(\eta_2 + y\eta_1)^2 - 4y\eta_1\eta_2S}$$

となる。両辺二乗して整理すると

$$\eta_1(\eta_1 - \eta_2S)y^2 + 2\eta_1\eta_2Ty + \eta_2(\eta_2 - \eta_1S) \leq 0$$

となる。これは y についての二次不等式である。この二次不等式を解くと

$$y \geq 1 \pm \frac{(1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2S})(1 + \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}S})}{\eta_2S - \eta_1}$$

となる。しかし、発生確率は次のような不等式を満たさなければならない。

$$\eta_1 \leq \eta_2S \quad (3.52)$$

また、 $y \leq 1$ でなければならない。よって、 y は次のように与えられた不等式を満たす。

$$y \geq 1 + \frac{(1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2S})(1 + \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}S})}{\eta_2S - \eta_1} \quad (3.53)$$

そして、(3.53) 式によって (3.4), (3.13) 式は簡単に一つの方程式 $P_\times = m$ に書き換えることができる。平均の間違い確率 P_\times は

$$P_\times = \eta_1 \text{tr}[E_2\rho_1] = \eta_1 \frac{1 + \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1}{2} = \eta_1 \frac{1 + \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} \cdot \mathbf{n}_1}{2}$$

となる。これが error margin m と一致しなければならない。よって、この方程式を y について解くと

$$y = \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(T - S + \sqrt{ST} \frac{\eta_1 - 2m}{\sqrt{m}(\eta_1 - m)} \right) \quad (3.54)$$

となる。これは、パラメータ y と error margin m との間にある関係を示している。

いま (3.53) 式によって与えられたパラメータ y の許される範囲を error margin m のそれ書き換えることができる。

$$0 \leq m \leq \frac{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1 \eta_2 S})^2}{1 - 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}} \quad (3.55)$$

ここで、次のように定義する。

$$m'_c \equiv \frac{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1 \eta_2 S})^2}{1 - 2\sqrt{\eta_1 \eta_2 S}} \quad (3.56)$$

(3.55) 式と (3.52) 式を統合して、singel-state 領域は $0 \leq m \leq m'_c$ で指定されることがわかる。

最適な識別成功確率 P_{\max} は $d = \text{tr}[Y] + my$ を計算することによって求められる。

$$P_{\max} = \eta_2 \left(\sqrt{\frac{m}{\eta_1} S} + \sqrt{\frac{\eta_1 - m}{\eta_1} T} \right)^2 \quad (3.57)$$

$m = 0$ の時、この最適な識別成功確率 P_{\max} は $\eta_1 \leq \eta_2 S$ の場合の unambiguous discrimination での最適な識別成功確率 $P_u = \eta_2(1 - S)$ を再現している。

いま $\eta_1 \leq \eta_2$ を想定しているが、 $\eta_1 \geq \eta_2$ の場合についても同様に $E_2 = 0$ で状態 ρ_2 が除外されるような single-state 領域があることは明らかである。

3.4 Weak error-margin condition と Strong error-margin condition

ここまで平均の間違い確率 P_{\times} に対して error margin を課して識別問題を考えてきた。しかし、違った方法で error margin を課することもできる。測定結果が $\mu = 1$ であるとする。この場合、識別が間違える確率は条件付き確率 $P_{\rho_2|E_1}$ で表される。この節では、次のような二つの条件付き確率が error margin m を越えてはならないという条件のもとでの識別問題を考える。

$$\begin{cases} P_{\rho_2|E_1} \leq m \\ P_{\rho_1|E_2} \leq m \end{cases} \quad (3.58)$$

ここで平均の間違い確率 P_{\times} は

$$\begin{aligned} P_{\times} &= P_{E_1, \rho_2} + P_{E_2, \rho_1} = P_{\rho_2|E_1} P_{E_1} + P_{\rho_1|E_2} P_{E_2} \\ &\leq m(P_{E_1} + P_{E_2}) \leq m \end{aligned}$$

である。したがって、(3.58) 式は (3.4) 式より強い条件である。(3.58) 式と (3.4) 式によって与えられた条件はそれぞれ strong error-margin condition、weak error-margin condition と呼ぶことにする。

等しい発生確率の場合については、weak と strong の両方の条件のもとでの最適な識別成功確率は得られている [8]。ここでは、一般の発生確率に対する weak error-margin condition のもとでの最適な識別成功確率と strong error-margin condition のもとでの最適な識別成功確率との間の関係を求める。"strong" と "weak" の二つの識別問題を見分けるために、それぞれに上付き文字 s と w を使う。

strong error-margin condition m^s を持つ最適な POVM $E_{\mu}^s(m^s)$ を行う。 $P_{\times}^s(m^s)$ によって示された $E_{\mu}^s(m^s)$ を使うことで平均間違い確率を計算するとしよう。条件付き間違い確率を使うと次のようなことに気付く。

$$\begin{aligned} P_{\times}^s(m^s) &= P_{\rho_2, E_1}^s(m^s) + P_{\rho_1, E_2}^s(m^s) \\ &= P_{\rho_2|E_1}^s(m^s) P_{E_1}^s(m^s) + P_{\rho_1|E_2}^s(m^s) P_{E_2}^s(m^s) \\ &\leq m^s (P_{E_1}^s(m^s) + P_{E_2}^s(m^s)) \\ &= m^s (P_{\max}^s(m^s) + P_{\times}^s(m^s)) \end{aligned}$$

であるから、次のようになる。

$$P_{\times}^s(m^s) \leq \frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s)$$

これは strong error-margin m^s を持つ最適な POVM $E_{\mu}^s(m^s)$ は $m^w = \frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s)$ を持つ weak error-margin condition を満たすことを必要とする。したがって、二つの最適な識別成功確率 P_{\max}^s と P_{\max}^w に対する不等式を得る。

$$P_{\max}^s(m^s) \leq P_{\max}^w \left(\frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s) \right) \quad (3.59)$$

$P_{\max}^s(m) \leq P_{\max}^w(m)$ という関係は error margin m の共通の値に対して成立することに注意しなければならない。なぜなら、strong error-margin condition は weak error-margin condition よりも強い条件であるからである。しかしながら、(3.59) 式は異なる値の error margin を含んでいて、この不等式で実際に等号が成り立つのかを示す。

二つの最適な識別成功確率に対するもう一つの不等式を得ることができる。weak error-margin m^w を満たしながら最適な POVM $E_{\mu}^w(m^w)$ をとるとする。minimum-error 領域と intermediate 領域では二つの条件付き間違い確率は等しかった。single-state 領域では、二つの条件付き間違い確率の一つは定義できない。しかしながら、次のような関係が定数 κ に対してまだ成立している。

$$\begin{aligned} P_{\rho_2, E_1}^w(m^w) &= \kappa P_{E_1}^w(m^w) \\ P_{\rho_1, E_2}^w(m^w) &= \kappa P_{E_2}^w(m^w) \end{aligned}$$

これらの二つの関係式に加えて、次のような関係を得る。

$$\begin{aligned} P_{\times}^w(m^w) &= \kappa (P_{E_1}^w(m^w) + P_{E_2}^w(m^w)) \\ &= \kappa (P_{\max}^w(m^w) + P_{\times}^w(m^w)) \end{aligned}$$

であるから、次のようになる。

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{P_{\times}^w(m^w)}{P_{\max}^w(m^w) + P_{\times}^w(m^w)} \\ &\leq \frac{m^w}{P_{\max}^w(m^w) + m^w} \end{aligned}$$

これは weak error-margin condition のもとでの識別問題での条件付き間違い確率は $m^s = \frac{m^w}{P_{\max}^w(m^w) + m^w}$ を持つ strong error-margin condition を満たすことを示している。したがって、次のように与えられたもう一つの不等式を得る。

$$P_{\max}^w(m^w) \leq P_{\max}^s \left(\frac{m^w}{P_{\max}^w(m^w) + m^w} \right) \quad (3.60)$$

実際に (3.59) 式と (3.60) 式の等号は成り立つ。これは次のようにしてみることができる。

$$\begin{aligned} P_{\max}^s(m^s) &\leq P_{\max}^w \left(\frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s) \right) \\ &\leq P_{\max}^s \left(\frac{\frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s)}{P_{\max}^w \left(\frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s) \right) + \frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s)} \right) \\ &\leq P_{\max}^s \left(\frac{\frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s)}{P_{\max}^s(m^s) + \frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s)} \right) \\ &= P_{\max}^s(m^s) \end{aligned}$$

上の導出では、識別成功確率は error margin の増加関数であるということを用いた。したがって、もし二つの error margin m^s と m^w が

$$m^s = \frac{m^w}{P_{\max}^w(m^w) + m^w} \quad (3.61)$$

と関係づけられるか、これと等価である

$$m^w = \frac{m^s}{1 - m^s} P_{\max}^s(m^s) \quad (3.62)$$

と関係づけられるならば、二つの最適な識別成功確率は等しい。

$$P_{\max}^s(m^s) = P_{\max}^w(m^w) \quad (3.63)$$

最適な識別成功確率の一つを知っている時、もう一つの識別成功確率はそれらの式によって決定することができる。最適な POVM も同様の方法を用いて次のように関係づけられる。

$$E_{\mu}^s(m^s) = E_{\mu}^w(m^w) \quad (3.64)$$

以上のような関係を用いれば、strong error-margin condition のもとでの最適な識別成功確率は次のように得られる。

$$P_{\max}^s = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 S}\right) & (m_c^s \leq m \leq 1) \\ A_m \left(1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}\right) & (m_c^{s'} \leq m \leq m_c^s) \\ \frac{\eta_1\eta_2(1-m)(1-S)}{m\eta_2 + (1-m)\eta_1 - 2\sqrt{m(1-m)\eta_1\eta_2 S}} & (0 \leq m \leq m_c^{s'}) \end{cases} \quad (3.65)$$

ここで A_m は次のように与えられる。

$$A_m = \frac{1 - m}{(1 - 2m)^2} \left(1 + 2\sqrt{m(1 - m)}\right) \quad (3.66)$$

$\eta_1 \leq \eta_2$ を想定し、 m_c と $m_c^{s'}$ は次のように定義される。

$$m_c \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 S}\right) \quad (3.67)$$

$$m_c^{s'} \equiv \begin{cases} \frac{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2}{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2 + (\eta_2 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2} & (\eta_1 \leq \eta_2 S) \\ 0 & (\eta_1 \geq \eta_2 S) \end{cases} \quad (3.68)$$

ここで、 m_c は weak error-margin condition の場合と等しくなる。これは、(3.58) 式に minimum-error 領域での最適な POVM を代入すると確かめられる。minimum-error 領域では、識別が間違ふ確率に対する制限は作用しなくなるので weak error-margin condition の場合も strong error-margin condition の場合も等しくなると考えられる。

3.5 最適な識別成功確率

発生確率と error margin のパラメータ空間は最適な測定のタイプによって、次のような三つの領域に分けられる。

$$\begin{cases} m_c \leq m \leq 1 & (\text{Minimum-error 領域}) \\ m'_c \leq m \leq m_c & (\text{Intermediate 領域}) \\ 0 \leq m \leq m'_c & (\text{Single-state 領域}) \end{cases}$$

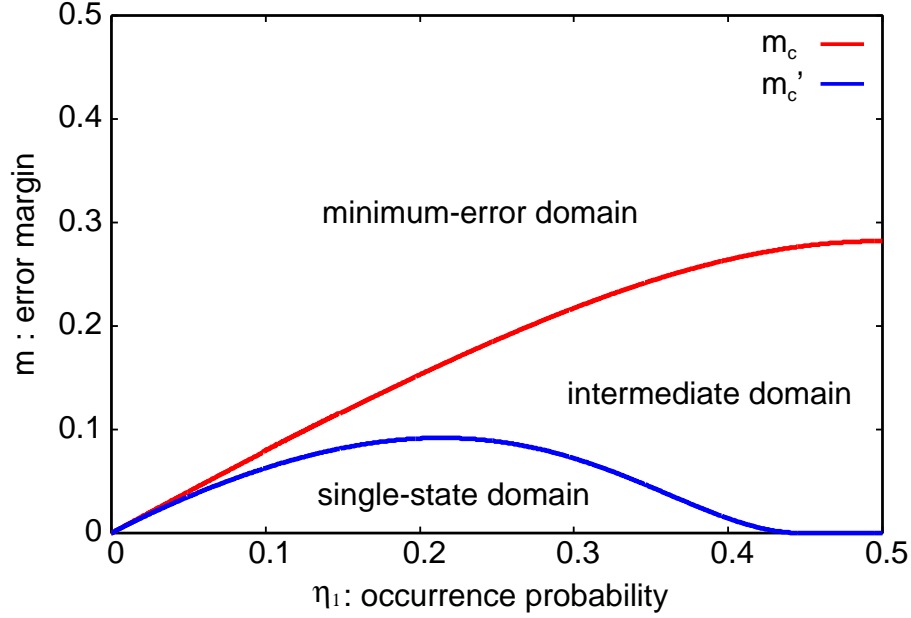


図 3.1: 発生確率 η_1 と error margin m のパラメータ空間内の三つの領域 (1)

図 3.1 は weak error-margin condition の場合で $\sqrt{S} = |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle| = 0.9$ の時の三つの領域を描いている。ここで critical error margins m_c, m'_c は次のように定義されている。

$$m_c = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 S} \right) \quad (3.69)$$

$$m'_c = \begin{cases} \frac{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2}{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}} & (\eta_1 \leq \eta_2 S) \\ 0 & (\eta_1 \geq \eta_2 S) \end{cases} \quad (3.70)$$

それぞれの領域の最適な識別成功確率 P_{\max}^w は次のように求められた。

$$P_{\max}^w = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 S} \right) & (m_c \leq m \leq 1) \\ \left(\sqrt{m} + \sqrt{1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}} \right)^2 & (m'_c \leq m \leq m_c) \\ \eta_2 \left(\sqrt{\frac{m}{\eta_1} S} + \sqrt{\frac{\eta_1 - m}{\eta_1} T} \right)^2 & (0 \leq m \leq m'_c) \end{cases}$$

また、critical error margin m_c は実は minimum error discrimination の平均間違い確率である。もし、 $m_c \leq m$ ならば間違いの確率の制限は作用しない。これが minimum-error 領域の P_{\max} が minimum error discrimination のそれである理由である。これは、strong error-margin condition の場合にも同様である。

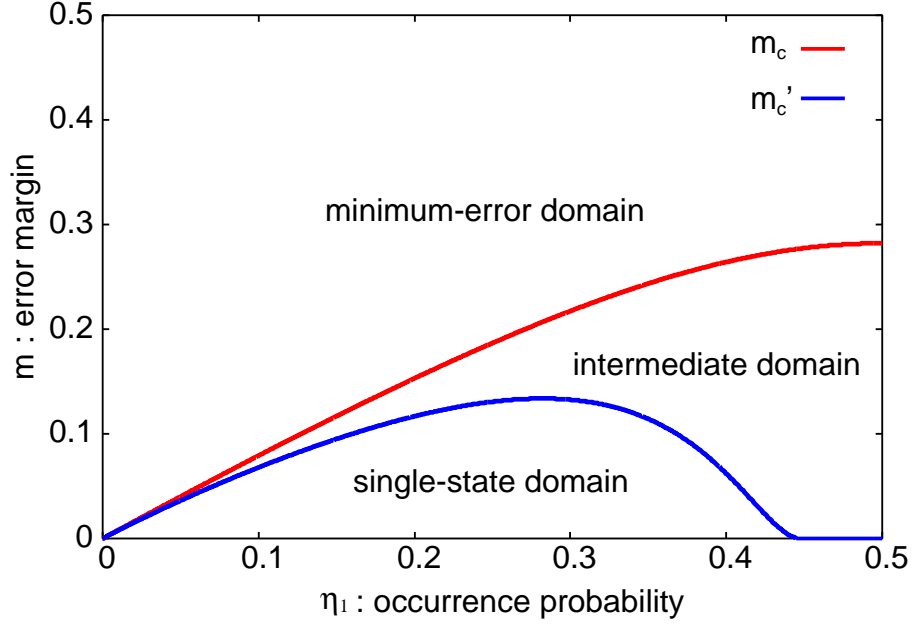


図 3.2: 発生確率 η_1 と error margin m のパラメータ空間内の三つの領域 (2)

図 3.2 は strong error-margin condition の場合で $\sqrt{S} = |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle| = 0.9$ の時の三つの領域を描いている。ここで critical error margins $m_c, m_c^{s'}$ は次のように定義されている。

$$m_c = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 S} \right)$$

$$m_c^{s'} = \begin{cases} \frac{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2}{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2 + (\eta_2 - \sqrt{\eta_1\eta_2 S})^2} & (\eta_1 \leq \eta_2 S) \\ 0 & (\eta_1 \geq \eta_2 S) \end{cases}$$

それぞれの領域の最適な識別成功確率 P_{\max}^s は次のように求められた。

$$P_{\max}^s = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 S} \right) & (m_c^s \leq m \leq 1) \\ A_m \left(1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2 S} \right) & (m_c^{s'} \leq m \leq m_c^s) \\ \frac{\eta_1\eta_2(1-m)(1-S)}{m\eta_2 + (1-m)\eta_1 - 2\sqrt{m(1-m)\eta_1\eta_2 S}} & (0 \leq m \leq m_c^{s'}) \end{cases}$$

である。ここで A_m は次のように与えられる。

$$A_m = \frac{1-m}{(1-2m)^2} \left(1 + 2\sqrt{m(1-m)} \right)$$

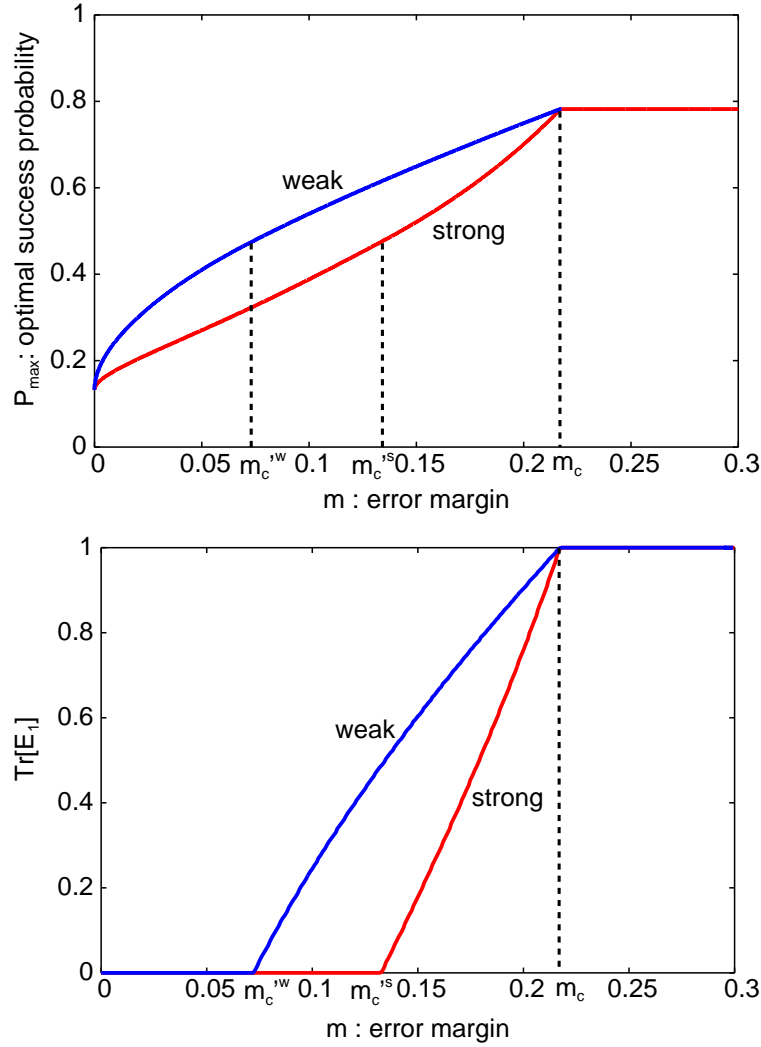


図 3.3: error margin m に対する最適な識別成功確率 P_{\max} (上部) と $\text{tr}[E_1]$ (下部)

図 3.3 では $\eta_1 = 0.3$ に固定し、error margin m に対して最適な識別成功確率 P_{\max} と $\text{tr}[E_1]$ を weak error-margin condition の場合と strong error-margin condition の場合についてプロットした。 P_{\max} のプロットで”weak”の場合の方が”strong”の場合よりも識別成功確率が上がっている。これは、”strong”の場合が”weak”の場合より識別が間違える確率に対して強い制限がされているためと考えられる。また、 $\text{tr}[E_1]$ のプロットは single-state 領域と intermediate 領域との境界を明らかに示すが、 P_{\max} のカーブは $m = m_c'$ でなめらかである。unambiguous discrimination では十分に小さい η_1 に対して最適な測定はいつも single-state 領域のタイプである。直観的に、これは無理なく現れる。しかしながら、図 3.1、図 3.2 はこれが有限の error margin に対して、もはや真実ではないことを示している。例えば、 $m = 0.06$ 付近に固定し、 η_1 を 0.5 から 0 まで変化させると、最適な測定のタイプは自明でない方法で変化する。intermediate 領域から single-state 領域、intermediate 領域、minimum-error 領域のタイプと変化する。

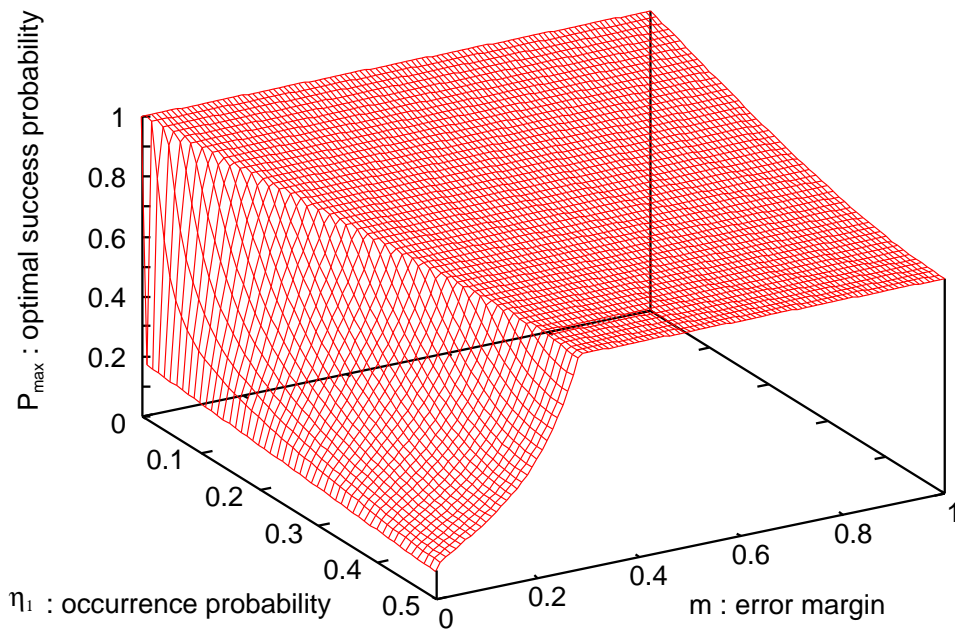
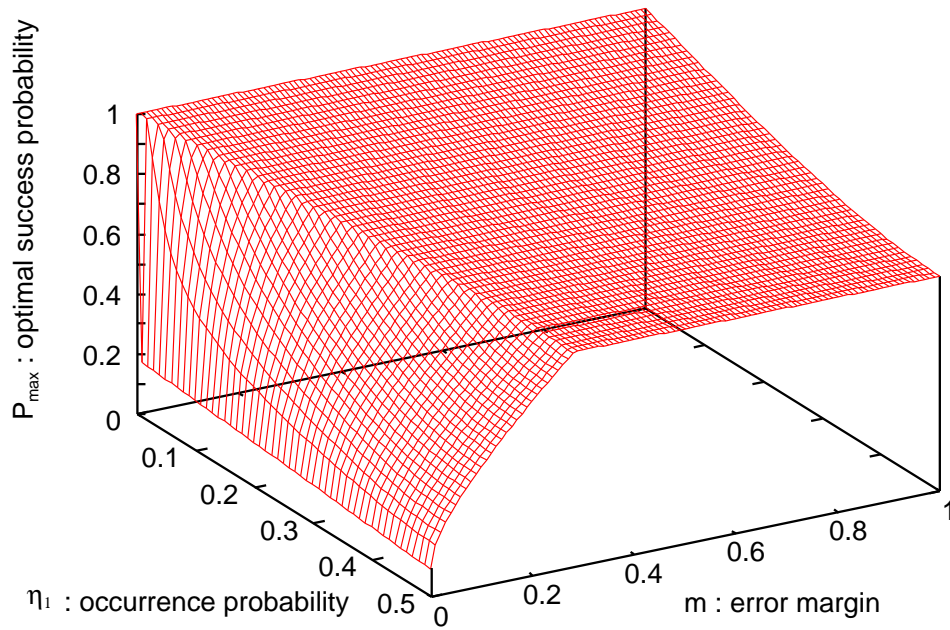


図 3.4: 最適な識別成功確率の三次元概観

図 3.4 は $\sqrt{S} = 0.9$ の時の weak error-margin condition の場合 (上部) と strong error-margin condition の場合 (下部) の最適な識別成功確率の三次元概観を表す。

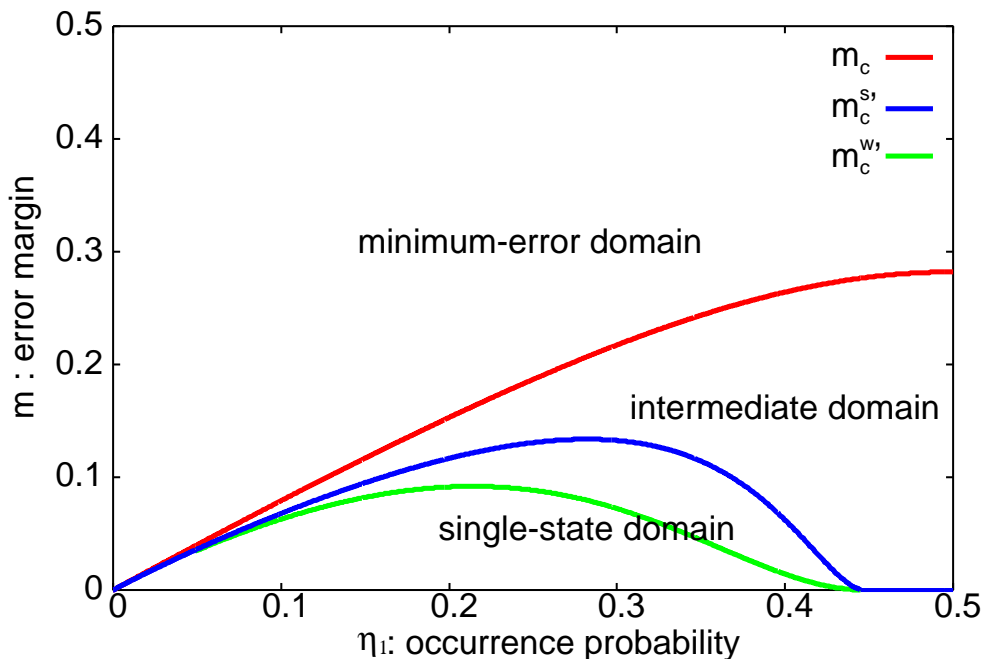
第4章 結論

本研究では、まず、量子状態の識別問題を考える上で一般的な二つの設定である minimum-error discrimination と unambiguous discrimination の二つの純粋状態の場合について最適な識別成功確率の導出についてまとめた。

次に、識別が間違える確率に対する error margin を導入することで、minimum-error discrimination と unambiguous discrimination を連続的に補間する状態識別問題を考察した。一般の発生確率を持つ二つの純粋状態の場合で、完全に解析的な形式で最適な識別成功確率が得られた。また、error margin には二つのタイプが考えられた。weak error-margin condition と strong error-margin condition である。この二つの制限のタイプの識別成功確率にある関係を示し、実際にその関係を用いて、strong error-margin condition の最適な識別成功確率が得られた。

Error margin のある二つの純粋状態の識別問題では最適な測定には三つのタイプがあることがわかった。以下で、その測定の三つのタイプによって発生確率と error margin のパラメータ空間が三つの領域に分かれることを図示する。

$$\begin{cases} m_c \leq m \leq 1 & (\text{Minimum-error 領域}) \\ m'_c \leq m \leq m_c & (\text{Intermediate 領域}) \\ 0 \leq m \leq m'_c & (\text{Single-state 領域}) \end{cases}$$



Minimum-error 領域で最適な測定の POVM は、minimum-error discrimination のそれと一致する。これは、以前の研究で求められていた発生確率が等しい場合にも示されていた [8]。このことは error margin が $m_c < m$ となれば、minimum-error discrimination の設定での識別問題となり、識別が間違ふ確率に対して、何の制限もしなくなることを示している。Intermediate 領域では、最適な測定の POVM の rank はすべて 1 となっている。また、最適な POVM を用いれば次のような対称性が現れることがわかった。

$$\begin{aligned} P_{\rho_2|E_1} &= P_{\rho_1|E_2} \\ P_{\rho_1|E_3} &= P_{\rho_2|E_3} \end{aligned}$$

一般の発生確率を持つ ρ_1, ρ_2 との間には明白な対称性がないので、これは注目すべき点である。Single-state 領域では、最適な測定の POVM 要素 E_1, E_2 のどちらかがゼロとなっている。これは、例えば E_1 がゼロであるならば、 ρ が ρ_1 であるという推定をしないで ρ が ρ_2 であると推定するか”わからない”と推定する方が識別成功確率が最適であるということである。これは、unambiguous discrimination でも発生確率が十分に小さければみられたことであった。 $0 \leq m \leq m'_c$ の範囲であるなら、発生確率が小さければ、間違いを少し許容した場合でも unambiguous discrimination と同じようなことが起こることがわかった。

この測定の三つのタイプは発生確率と error margin に依存して変化していく。発生確率 η を固定し、error margin を変化させていく場合について、測定のタイプは自明な方法で変化していくように見える。しかし、error margin を固定し、 η を変化させていくと自明でない方法で測定のタイプは変化していくことがわかった。

この研究により、二つの純粋状態の場合では、どのような場合でも最適な識別成功確率が求められた。今後の課題として、識別する状態が増えた場合についてどうなるかという問題が挙げられる。この論文には掲載しなかったが、現在、三つの純粋状態の unambiguous discrimination の最適な識別成功確率を求めることに挑戦している。この研究は、様々な先行研究があるが、まだ最適な識別成功確率は求められていない。現段階で、それぞれの状態の内積が実数に帰着できる場合には最適な識別成功確率が求められているので、複素数に拡張し最適な識別成功確率を求める。

参考文献

- [1] A. Chefles, *Contemp. Phys.* **41**, 401 (2000).
- [2] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).
- [3] I. D. Ivanovic, *Phys. Lett. A* **123**, 257 (1987).
- [4] D. Dieks, *Phys. Lett. A* **126**, 303 (1988).
- [5] A. Peres, *Phys. Lett. A* **128**, 19 (1988).
- [6] G. Jaeger and A. Shimony, *Phys. Lett. A* **197**, 83 (1995).
- [7] M. A. P. Touzel, R. B. A. Adamson, and A. M. Steinberg, *Phys. Rev. A* **76**, 062314 (2007).
- [8] A. Hayashi, T. Hashimoto, and M. Horibe, *Phys. Rev. A* **78**, 012333 (2008).
- [9] H. Sugimoto, T. Hashimoto, M. Horibe, and A. Hayashi, *Phys. Rev. A* **80**, 052322 (2009).
- [10] L. Vandenberghe, and S. Boyd, *SIAM Rev.* **38**, 49 (1996).
- [11] Y. C. Eldar, A. Megretski, and G. C. Verghese, *IEEE Trans. Inf. Theory* **49**, 1007 (2003).
- [12] Y. C. Eldar, *IEEE Trans. Inf. Theory* **49**, 446 (2003).
- [13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).

謝辞

本論文を作成するにあたり、指導教員である林明久先生には最初から最後まで懇切丁寧な御指導を賜り、感謝の念が堪えません。また、堀邊稔先生、橋本貴明先生にも御指導、御助言を頂きましたことに厚く御礼申し上げます。そして、田島直樹先生には、日頃よりの丁寧な御指導、御世話をいただきました。

最後になりましたが、学部生の頃より御世話になりました物理工学科の先生方にも御礼申し上げます、謝辞の言葉とさせていただきます。

2010年2月
杉本 宏行

付録 A 2次元の Hermite 演算子

任意の 2次元の Hermite 演算子 A とその Hermite 共役 (転置複素共役) A^\dagger は

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

で表される。また、演算子 A は Hermite であるから

$$A = A^\dagger \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ。このことから

$$a = a^*, \quad b = c^*, \quad c = b^*, \quad d = d^*$$

でなければならない。よって、 a, d は実数、 b, c は次のような複素数で表すことができる。

$$\begin{cases} b = x - iy \\ c = x + iy \end{cases}$$

ここで、 x, y は実数である。よって、任意の Hermite 演算子 A は

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & x - iy \\ x + iy & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{a+b}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \frac{a-b}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{a+b}{2} \cdot I + x \cdot \sigma_x + y \cdot \sigma_y + \frac{a-b}{2} \cdot \sigma_z \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで、 I は単位行列、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はパウリ行列 σ の x, y, z 成分を表す。改めて、

$$\alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta_x = x, \quad \beta_y = y, \quad \beta_z = \frac{a-b}{2}$$

とおくと

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta_x \sigma_x + \beta_y \sigma_y + \beta_z \sigma_z \\ &= \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と書くことができる。

また、A の固有値 λ は次のような固有値方程式を解くことによって求められる。

$$\begin{aligned}\det |A - \lambda I| &= \det \begin{vmatrix} \alpha + \beta_z - \lambda & \beta_x - i\beta_y \\ \beta_x + i\beta_y & \alpha - \beta_z - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha + \beta_z - \lambda)(\alpha - \beta_z - \lambda) - (\beta_x - i\beta_y)(\beta_x + i\beta_y) \\ &= ((\alpha - \lambda) + \beta_z)((\alpha - \lambda) - \beta_z) - \beta_x^2 - \beta_y^2 \\ &= (\alpha - \lambda)^2 - (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) \\ &= (\alpha - \lambda)^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2 \\ &= (\alpha + |\boldsymbol{\beta}| - \lambda)(\alpha - |\boldsymbol{\beta}| - \lambda) = 0\end{aligned}\tag{A.4}$$

よって、固有値 λ は

$$\lambda = \alpha \pm |\boldsymbol{\beta}|\tag{A.5}$$

である。