

一般方向のスピン成分に関する King 問題

2008年2月

福井大学 工学部 物理工学科

杉本 宏行

目次

第1章	はじめに	2
第2章	qubit	4
2.1	qubit について	4
2.2	エンタングルした状態について	4
2.3	正規直交基底について	5
2.4	Bloch 球について	5
2.5	qubit の内積公式について	7
第3章	King 問題について	9
3.1	King 問題を考える目的	9
3.2	Alice の推定方法について	10
第4章	King の測定が直交した3方向 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つの場合	11
4.1	Vaidman らの研究	11
4.2	エンタングルした状態を使わない場合	21
第5章	King の測定が直交しない3方向 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つの場合	27
5.1	エンタングルした状態を使わない場合	27
5.2	エンタングルした状態を使う場合	34
5.3	確率の変化	40
第6章	結論	43
6.1	まとめ	43
6.2	今後の課題	43
	参考文献	44
	謝辞	45

第1章 はじめに

量子力学の基礎はシュレーディンガーやハイゼンベルクらによって波動力学・行列力学という形式で与えられ、光の二重性(粒子性と波動性)、「粒子の位置と運動量は同時に正確には決まらない」といった不確定性原理、「導かれる結論は粒子状態の存在確率である」とする確率解釈などの理論を柱としている。このような量子力学特有の理論を用いて、情報処理に応用したのが量子情報と呼ばれる分野である。

量子情報の最小単位である qubit は 0 と 1 の 2 値 (1 ビット) だけではなく、0 と 1 の重ね合わせの状態をとることができる。この qubit により古典計算機では不可能な並列処理が可能となる量子コンピュータが理論上可能となる。この量子コンピュータが実現すれば、現在情報通信分野で使用されている暗号システムが破られることになる。これは現在の暗号システムは、大きな桁数の素因数分解が時間がかかりすぎて事実上不可能であることを前提として成り立っているためである。

また、ここに 2 qubit があるとする。1 つの qubit の測定結果が 1 だったらもう 1 つの qubit の測定結果も 1 とただちに決まるような状態が存在する。このように 1 つの qubit の測定結果がもう 1 つの qubit の測定結果に影響する、すなわち測定結果が絡み合っている状態のことをエンタングルした状態と呼ぶ。この状態を利用し、量子テレポーテーションや量子暗号と呼ばれる技術が可能となる。

量子テレポーテーションとは受信者と送信者がエンタングルした状態の qubit 対を共有し、電話などの古典的な情報のやりとりが可能であれば、受信者は送信者の持っている qubit の状態を再現できるというものである。実際にもはや人が瞬間移動するというわけではないので、一般に想像されるテレポーテーションとは違う。また量子暗号とは送信者と受信者がエンタングルした状態の qubit の対の 1 つずつを持ち、送受信を行う。何回か送受信したのちに電話などの古典的な方法で送受信した方法を交換しあう。そこで一致した部分だけを使えば、同じ情報を共有できることになる。ここで、送受信の際にもし盗聴者の介入があれば測定する状態がこわれてしまい、本来一致するはずの送受信する情報が送受信者の間で食い違うことになり、盗聴されたことがわかる。盗聴されたものについては捨てて、盗聴されていないものだけを暗号の秘密鍵として使用する。この様に秘密鍵が共有できてしまえば、盗聴が理論上不可能となる。現在では量子テレポーテーションや量子暗号についてさまざまな実験に成功しているが、量子デコヒーレンスと呼ばれる環境との相互作用によって量子系の干渉が失われる現象によりエンタングルした状態を長時間維持することが難しいなどの未解決問題があり、現在も研究が進んでいる。

本研究では、量子情報分野では一般的な King 問題 (Mean King Problem) について取り上げた。この King 問題には Alice と意地悪な King が登場する。意地悪な King は物理学者である Alice に対して、問題を出す。その問題に答えられなければ、Alice は

殺されてしまう、というような童話をモチーフによく登場する。

この King 問題を考える目的としては、一般に複数の非可換な物理量を 1 つ測定した時の結果を、他の測定結果から推定するというものが挙げられる。非可換な物理量では 1 つの物理量の測定結果が決まっても、他の物理量の測定結果は決まらず、測定結果も確率的にしか現れないため、自明な答えがない。したがって、測定結果を推定することは非常に困難である。この研究では非可換な物理量の例として大きさが $\frac{1}{2}$ のスピンの成分を考えることにする。

1987 年、Vaidman らの研究によって、エンタングルした状態を使えば、スピンの成分が直交している場合、すなわち、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか 1 つを測定した場合の測定結果を他の測定結果から 100% 正しく推定することができることが示された。しかし、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか 1 つを測定した場合でエンタングルした状態を使わない場合ではどうなるのだろうか。この疑問を解決するため、本研究では、エンタングルした状態を使わないでも測定結果を正しく推定することができる確率を求め、正しく推定することが可能なのかを調べてみる。そして、エンタングルした状態を使った場合と比較して qubit のエンタングルした状態にはどのくらい有効性があるのかをみる。

また、測定するスピンの成分が直交しない一般の 3 方向の成分だったときにはどうだろうか。エンタングルした状態を使った場合と使わない場合について、それぞれ正しく推定することができる確率を求め、どの程度正しく推定することが可能なのか調べてみる。そして、測定するスピンの成分の方向が変化すると、確率の変化にどのような特徴があるのか調べてみる。

第2章 qubit

量子情報を考える上では、量子情報の最小単位ともなっている qubit は非常に重要である。qubit には従来の古典的なビットにはない興味深い特徴があり、qubit の状態やその状態を表すには量子力学的手法を用いる。ここでは、そんな qubit の状態について説明する。

2.1 qubit について

qubit とは、量子ビットとも呼ばれ、量子情報の最小単位のことである。従来の古典的なビットでは $|\uparrow\rangle$ か $|\downarrow\rangle$ かのどちらかの状態しかとることができない。しかし、量子力学的性質を持つ qubit では、 $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ だけでなく $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ との重ね合わせの状態もとることができる。

重ね合わせの状態の例

$$|\phi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \quad (2.1)$$

α と β は複素数を取り、次の条件で規格化されている。

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.2)$$

2.2 エンタングルした状態について

量子エンタングルメント (Quantum entanglement) とは、量子絡み合いまたは単にエンタングルメントとも呼ばれる。例のように 1 つめの qubit を測定結果が $|\uparrow\rangle$ だったら、2 つめの qubit の測定結果も $|\uparrow\rangle$ である。1 つめの qubit を測定結果が $|\downarrow\rangle$ だったら、2 つめの qubit の測定結果も $|\downarrow\rangle$ である。この様に、1 つめの qubit の測定の結果が 2 つめの qubit の測定の結果に影響すること。すなわち、2 つの測定結果が絡み合っている状態のことである。

エンタングルした状態の例

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (2.3)$$

2.3 正規直交基底について

まず、qubit についてある 2 つの状態 $|\phi_n\rangle$ ($n = 1, 2$) があつたとする。それぞれの状態は次式で表わされ、規格化されている。

$$|\phi_n\rangle = \alpha_n |\uparrow\rangle + \beta_n |\downarrow\rangle \quad (2.4)$$

$$|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1 \quad (2.5)$$

この 2 つの状態の内積について次式が成立しているとする。

$$\begin{cases} \langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0, & (n \neq m) \\ \langle \phi_n | \phi_n \rangle = 1, & (n = 1, 2) \end{cases} \quad (2.6)$$

この関係式は次式のようにまとめられる。

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} \quad (2.7)$$

一般に、この条件式を満たす $|\phi_n\rangle$ ($n = 1, 2$) を正規直交基底と呼ぶ。

2.4 Bloch 球について

規格化された qubit の状態は次式のように表される。

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.8)$$

ここで、(2.8) 式は次式のように書き換えることができる。

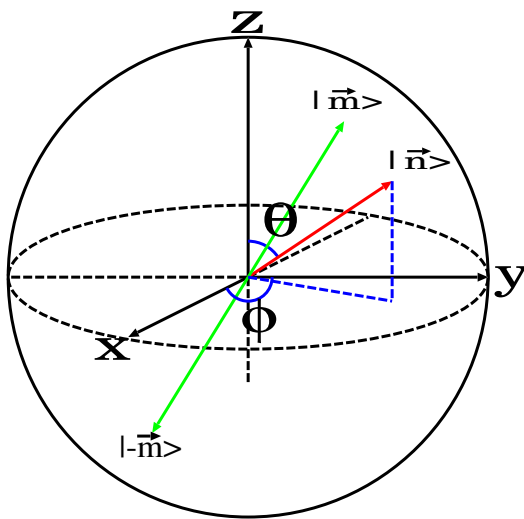
$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle \right\} \quad (2.9)$$

ただし $e^{i\gamma}$ は測定結果に影響しないので無視することができる。

よって、qubit の状態は次式で表されることになる。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle \quad (2.10)$$

状態 $|\psi\rangle$ は θ と ϕ で表される 3次元単位球上の点で表されることになる。この球を Bloch 球と呼び、この Bloch 球を用いることで qubit の状態を視覚的にとらえることが可能となる。qubit の操作は多くの場合、Bloch 球上で定義される。図のように Bloch 球上の点を指すベクトルを Bloch ベクトルといい、Bloch ベクトル \vec{n} に対応する qubit の状態が $|\vec{n}\rangle$ となる。よって、次のように表すことができる。



$$|\vec{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle \quad (2.11)$$

図 2.1: Bloch 球上の $|\vec{n}\rangle$

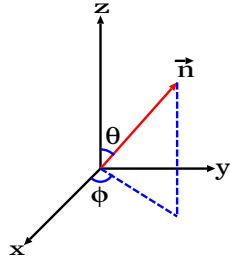
また、図より $|\vec{m}\rangle, |\vec{-m}\rangle$ は量子力学的に直交しているので、 $|\vec{m}\rangle, |\vec{-m}\rangle$ の内積 $\langle\vec{m}|\vec{-m}\rangle$ は

$$\langle\vec{m}|\vec{-m}\rangle = 0 \quad (2.12)$$

となる。

2.5 qubit の内積公式について

今、単位ベクトル空間上の点を指すベクトル \vec{n}, \vec{n}' があり、次のように定義される。



$$\begin{cases} \vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \vec{n}' = (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') \end{cases} \quad (2.13)$$

図 2.2: 単位ベクトル空間の \vec{n}

ここで \vec{n}, \vec{m} の内積 $\vec{n} \cdot \vec{m}$ は

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{n}' &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') \\ &= \sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta' \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (2.14)$$

また、Bloch 球上の点を指す Bloch ベクトル \vec{n}, \vec{n}' があり、qubit の状態 $|\vec{n}\rangle, |\vec{n}'\rangle$ が次のように定義される。

$$\begin{cases} |\vec{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle \\ |\vec{n}'\rangle = \cos \frac{\theta'}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi'} \sin \frac{\theta'}{2} |\downarrow\rangle \end{cases} \quad (2.15)$$

ここで $|\vec{n}\rangle, |\vec{n}'\rangle$ の内積 $\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle$ は

$$\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + e^{i(\phi - \phi')} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \quad (2.16)$$

また、この内積の絶対値の 2 乗 $|\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle|^2$ は

$$\begin{aligned} |\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle|^2 &= \left| \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + e^{i(\phi - \phi')} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right|^2 \\ &= \left| \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \cos(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right\} - i \left\{ \sin(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right\} \right|^2 \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta'}{2} + \cos^2(\phi - \phi') \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta'}{2} \\ &\quad + 2 \cos(\phi - \phi') \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} + \sin^2(\phi - \phi') \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta'}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ 1 + \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで $\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ は単位ベクトル空間の \vec{n} , \vec{n}' の内積で表すことができる。よって、次式が成り立つ。

$$|\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}') \quad (2.18)$$

この式を qubit の内積公式と定義する。

第3章 King問題について

本研究では、量子情報分野では一般的な King 問題 (Mean King Problem) について取り上げた。この King 問題は意地悪な King が物理学者である Alice に対して、問題を出す。その問題が解けなければ Alice は殺されてしまうというような童話をモチーフによく登場する。その童話の登場人物として Alice と King が登場するので、本研究でも登場人物の 2 人を Alice と King として話を進めていくことにする。

3.1 King問題を考える目的

まず、King 問題を考える目的として、複数の非可換な物理量のどれか 1 つを測定した場合、その結果を他の測定結果から推定することができるのかである。非可換な物理量では、1 つの物理量の測定結果が決まっても、他の物理量の測定結果は決まらず、測定結果も確率的にしか現れないため、自明な答えがない。したがって、推定することは非常に困難である。この研究では非可換な物理量の例として大きさが $\frac{1}{2}$ のスピンの成分を考えることにする。まずは、直交した 3 方向のスピンの成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を考えていくことにする。

3.2 Alice の推定方法について

次に具体的にどのような手順で推定していくのかを説明する。

1. Alice はある状態の qubit $|\phi\rangle$ を用意し、King に渡す。
2. King は渡された qubit に対して、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか 1 つの測定をし、Alice に返す。
3. Alice は返ってきた qubit に対して、ある測定をする。
4. King は Alice に自分が測定したスピンの方向を教える。
(King が σ_x を測定したとすると x 方向)
5. Alice は自分の測定結果と King がどの方向の測定をしたかという情報から King の測定結果を推定する。

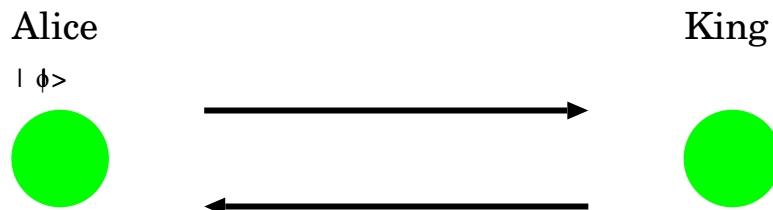


図 3.1: Alice の測定方法

このような手順で Alice が King の測定結果を正しく推定することができるのかをみていく。

第4章 Kingの測定が直交した3方向 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つの場合

では、実際に先ほど説明した手順で Alice は King の測定結果を推定することができるのかみていく。まず、King の測定が直交した3方向 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つの場合はどうなるだろうか。

4.1 Vaidman らの研究

Vaidman らはエンタングルした状態を使えば、直交した $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つを測定した場合の測定結果を他の測定結果から 100% 正しく推定することができることを示した。(1987年)[1]

ここでは、Vaidman らの研究で用いられた方法を説明する。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle) \quad (4.1)$$

というエンタングルした状態を Alice が用意する。Alice は1つめの qubit を King に渡し、2つめの qubit は自分自身が持つておく。

King は渡された qubit に対して $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つの測定を行う。そして、Alice に返す。

Alice は、返ってきた qubit と持っていた qubit との2 qubit に対して $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ という4つの正規直交基底を固有状態に持つ演算子 A による測定を行う。Alice の測定後、King は Alice に測定した方向のみを教える。

Alice は King の測定方向と qubit の状態から King の測定結果を推定する。

演算子 A の4つの正規直交基底は以下の通りである。

$$\begin{cases} |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}}) \\ |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle - \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}}) \\ |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}) \\ |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle - \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}) \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで、 e_x, e_y, e_z は x, y, z 軸方向それぞれの単位方向ベクトルと定義される。

King の測定が $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の 3 つの場合についてそれぞれ調べてみる。

(I) King が σ_x の測定をする場合

x 軸方向の基底は次式のように定義される。

$$\begin{cases} |e_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ | - e_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \end{cases} \quad (4.3)$$

(4.3) 式を用いると $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ は次式で表される。

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_x\rangle + | - e_x\rangle) \\ |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_x\rangle - | - e_x\rangle) \end{cases} \quad (4.4)$$

ここで King が qubit に対して、 σ_x の測定をした場合を調べるため、(4.1) 式は次式のように書き換える。

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_x\rangle + | - e_x\rangle) |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_x\rangle - | - e_x\rangle) |\downarrow\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} (|e_x\rangle |\uparrow\rangle + | - e_x\rangle |\uparrow\rangle + |e_x\rangle |\downarrow\rangle - | - e_x\rangle |\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |e_x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) + | - e_x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_x\rangle |e_x\rangle + | - e_x\rangle | - e_x\rangle) \end{aligned} \quad (4.5)$$

この式は King の測定結果が $\begin{cases} \text{確率 } \frac{1}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1}{2} \text{ で } -1 \end{cases}$ となることを表す。

よって、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合についてそれぞれ考える。

(i) King の測定結果が 1 の場合

King の測定結果が 1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$\begin{aligned} |e_x\rangle|e_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Alice がこの 2 qubit $|e_x\rangle|e_x\rangle$ に対して演算子 A で測定をした場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$|e_x\rangle|e_x\rangle = C_1|\phi_1\rangle + C_2|\phi_2\rangle + C_3|\phi_3\rangle + C_4|\phi_4\rangle \quad (4.7)$$

(4.7) 式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C_1|^2, |C_2|^2, |C_3|^2, |C_4|^2$ が求められる。

$$\begin{aligned} |C_1|^2 &= |\langle\phi_1|e_x\rangle|e_x\rangle|^2 \\ &= \left| \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}(\langle\uparrow|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} + \langle\downarrow|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle) \right\} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}) \right\} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

以下も同様の計算により求められる。

$$|C_2|^2 = |\langle\phi_2|e_x\rangle|e_x\rangle|^2 = 0$$

$$|C_3|^2 = |\langle\phi_3|e_x\rangle|e_x\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_4|^2 = |\langle\phi_4|e_x\rangle|e_x\rangle|^2 = 0$$

(ii) King の測定結果が-1 の場合

King の測定結果が-1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$\begin{aligned} | -e_x \rangle | -e_x \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle - | \downarrow \rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle - | \downarrow \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(| \uparrow \rangle | \uparrow \rangle - | \uparrow \rangle | \downarrow \rangle - | \downarrow \rangle | \uparrow \rangle + | \downarrow \rangle | \downarrow \rangle) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Alice がこの 2 qubit $| -e_x \rangle | -e_x \rangle$ に対して演算子 A で測定した場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$| -e_x \rangle | -e_x \rangle = C'_1 |\phi_1\rangle + C'_2 |\phi_2\rangle + C'_3 |\phi_3\rangle + C'_4 |\phi_4\rangle \quad (4.9)$$

(4.9) 式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C'_1|^2, |C'_2|^2, |C'_3|^2, |C'_4|^2$ が求められる。

$$|C'_1|^2 = |\langle \phi_1 | -e_x \rangle | -e_x \rangle|^2 = 0$$

$$|C'_2|^2 = |\langle \phi_2 | -e_x \rangle | -e_x \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C'_3|^2 = |\langle \phi_3 | -e_x \rangle | -e_x \rangle|^2 = 0$$

$$|C'_4|^2 = |\langle \phi_4 | -e_x \rangle | -e_x \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

(II) King が σ_y の測定をする場合

y 軸方向の基底は次式のように定義される。

$$\begin{cases} |e_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \\ | -e_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \end{cases} \quad (4.10)$$

(4.10) 式を用いると $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ は次式で表される。

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle + | -e_y\rangle) \\ |\downarrow\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle - | -e_y\rangle) \end{cases} \quad (4.11)$$

ここで King が qubit に対して σ_y の測定をした場合を調べるため、(4.1) 式は次式のように書き換える。

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle + | -e_y\rangle)|\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle - | -e_y\rangle)|\downarrow\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ |e_y\rangle|\uparrow\rangle + | -e_y\rangle|\uparrow\rangle - i(|e_y\rangle|\downarrow\rangle - | -e_y\rangle|\downarrow\rangle) \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |e_y\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) + | -e_y\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_y\rangle| -e_y\rangle + | -e_y\rangle|e_y\rangle) \end{aligned} \quad (4.12)$$

この式は King の測定結果が $\begin{cases} \text{確率}\frac{1}{2}\text{で } 1 \\ \text{確率}\frac{1}{2}\text{で } -1 \end{cases}$ となることを表す。

よって、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合についてそれぞれ考える。

(i) King の測定結果が 1 の場合

King の測定結果が 1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$\begin{aligned} |e_y\rangle| -e_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle - i|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + i|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Alice がこの 2 qubit $|e_y\rangle| -e_y\rangle$ に対して演算子 A で測定した場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$|e_y\rangle| -e_y\rangle = C_1''|\phi_1\rangle + C_2''|\phi_2\rangle + C_3''|\phi_3\rangle + C_4''|\phi_4\rangle \quad (4.14)$$

この式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C_1''|^2, |C_2''|^2, |C_3''|^2, |C_4''|^2$ が求められる。

$$|C_1''|^2 = |\langle \phi_1 | e_y \rangle| - e_y \rangle|^2 = 0$$

$$|C_2''|^2 = |\langle \phi_2 | e_y \rangle| - e_y \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_3''|^2 = |\langle \phi_3 | e_y \rangle| - e_y \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_4''|^2 = |\langle \phi_4 | e_y \rangle| - e_y \rangle|^2 = 0$$

(ii) King の測定結果が -1 の場合

King の測定結果が -1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$\begin{aligned} | -e_y \rangle | e_y \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle - i | \downarrow \rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle + i | \downarrow \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(| \uparrow \rangle | \uparrow \rangle + i | \uparrow \rangle | \downarrow \rangle - i | \downarrow \rangle | \uparrow \rangle + | \downarrow \rangle | \downarrow \rangle) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Alice がこの 2 qubit $| -e_y \rangle | e_y \rangle$ に対して演算子 A で測定した場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$| -e_y \rangle | e_y \rangle = C_1'''|\phi_1\rangle + C_2'''|\phi_2\rangle + C_3'''|\phi_3\rangle + C_4'''|\phi_4\rangle \quad (4.16)$$

この式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C_1''''|^2, |C_2''''|^2, |C_3''''|^2, |C_4''''|^2$ が求められる。

$$|C_1''''|^2 = |\langle \phi_1 | -e_y \rangle |e_y\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_2''''|^2 = |\langle \phi_2 | -e_y \rangle |e_y\rangle|^2 = 0$$

$$|C_3''''|^2 = |\langle \phi_3 | -e_y \rangle |e_y\rangle|^2 = 0$$

$$|C_4''''|^2 = |\langle \phi_4 | -e_y \rangle |e_y\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

(III) King が σ_z の測定をする場合

z 軸方向の基底は次式のように定義される。

$$\begin{cases} |e_z\rangle = |\uparrow\rangle \\ | -e_z\rangle = |\downarrow\rangle \end{cases} \quad (4.17)$$

(4.17) 式を用いると $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ は次式で表される。

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = |e_z\rangle \\ |\downarrow\rangle = | -e_z\rangle \end{cases} \quad (4.18)$$

ここで King が qubit に対して σ_z の測定をした場合を調べるため、(4.1) 式は次式のように書き換える。

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_z\rangle|\uparrow\rangle + | -e_z\rangle|\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_z\rangle|e_z\rangle + | -e_z\rangle| -e_z\rangle) \end{aligned} \quad (4.19)$$

この式は King の測定結果が $\begin{cases} \text{確率}\frac{1}{2}\text{で } 1 \\ \text{確率}\frac{1}{2}\text{で } -1 \end{cases}$ となることを表す。

よって、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合についてそれぞれ考える。

(i) King の測定結果が 1 の場合

King の測定結果が 1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$|e_z\rangle|e_z\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \quad (4.20)$$

Alice がこの 2 qubit $|e_z\rangle|e_z\rangle$ に対して演算子 A で測定した場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$|-e_z\rangle|-e_z\rangle = C_1''''|\phi_1\rangle + C_2''''|\phi_2\rangle + C_3''''|\phi_3\rangle + C_4''''|\phi_4\rangle \quad (4.21)$$

この式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C_1''''|^2, |C_2''''|^2, |C_3''''|^2, |C_4''''|^2$ が求められる。

$$|C_1''''|^2 = |\langle\phi_1|e_z\rangle|e_z\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_2''''|^2 = |\langle\phi_2|e_z\rangle|e_z\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_3''''|^2 = |\langle\phi_3|e_z\rangle|e_z\rangle|^2 = 0$$

$$|C_4''''|^2 = |\langle\phi_4|e_z\rangle|e_z\rangle|^2 = 0$$

(ii) King の測定結果が- 1 の場合

King の測定結果が- 1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$| - e_z \rangle | - e_z \rangle = | \downarrow \rangle | \downarrow \rangle \quad (4.22)$$

Alice が 2 qubit $| - e_z \rangle | - e_z \rangle$ に対して演算子 A で測定した場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$| - e_z \rangle | - e_z \rangle = C_1'''' |\phi_1\rangle + C_2'''' |\phi_2\rangle + C_3'''' |\phi_3\rangle + C_4'''' |\phi_4\rangle \quad (4.23)$$

この式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C_1''''|^2, |C_2''''|^2, |C_3''''|^2, |C_4''''|^2$ が求められる。

$$|C_1''''|^2 = |\langle \phi_1 | - e_z \rangle | - e_z \rangle|^2 = 0$$

$$|C_2''''|^2 = |\langle \phi_2 | - e_z \rangle | - e_z \rangle|^2 = 0$$

$$|C_3''''|^2 = |\langle \phi_3 | - e_z \rangle | - e_z \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|C_4''''|^2 = |\langle \phi_4 | - e_z \rangle | - e_z \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

(I),(II),(III) の計算結果を表にまとめると

表 4.1: 測定結果の確率

		King の測定					
		σ_x		σ_y		σ_z	
		1	-1	1	-1	1	-1
Alice の 測定結果	$ \phi_1\rangle$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
	$ \phi_2\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$ \phi_3\rangle$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$ \phi_4\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

この表をみると、もし Alice の測定結果が $|\phi_1\rangle$ だったとすると King が $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれを測定していたとしても King の測定結果は 1 となる。ということは Alice は、1 といえば King の測定結果を正しく推定することになる。その他の場合でも正しく King の測定結果を正しく推定することができた。

よってエンタングルした状態を使えば、Alice は King の測定結果を 100% 正しく推定することができることを確認できた。

4.2 エンタングルした状態を使わない場合

エンタングルした状態を使う場合では、100%正しく推定することができることが確かめられた。では、エンタングルした状態を使わない場合、どうなるのだろうか。

$$|\vec{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle \quad (4.24)$$

というある一般の方向を向いた qubit を Alice が用意し、その qubit を King に渡す。King は、渡された qubit に対して $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つの測定を行う。そして、Alice に返す。

返ってきた qubit に対して \vec{n} とは異なる一般の方向の $|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle$ という基底を持つ演算子 B で測定する。Alice の測定後、King は Alice に測定した方向のみを教える。Alice は King の測定方向と qubit の状態から King の測定結果を推定する。

King の測定が $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の3つの場合についてそれぞれ調べてみる。

(I) King が σ_x の測定をする場合

King が qubit に対して σ_x の測定をした場合を調べるため、 $|\vec{n}\rangle$ は次式のように書く。

$$|\vec{n}\rangle = a|e_x\rangle + b| -e_x\rangle \quad (4.25)$$

この式から King の測定結果 1、-1 が現れるそれぞれの確率 $|a|^2, |b|^2$ を求める。

$$|a|^2 = |\langle e_x | \vec{n} \rangle|^2 = \frac{1+n_x}{2}$$

$$|b|^2 = |\langle -e_x | \vec{n} \rangle|^2 = \frac{1-n_x}{2}$$

よって、King の測定結果 1、-1 が現れる確率は

$$\begin{cases} \text{確率 } \frac{1+n_x}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1-n_x}{2} \text{ で } -1 \end{cases}$$

King の測定結果が 1、-1 の場合について、それぞれ考える。

(i) King の測定結果が 1 の場合

King の測定結果が 1 だった場合、Alice に返ってくる qubit は $|e_x\rangle$ という状態である。この qubit に対して演算子 B で測定した場合を調べるため、次式のように $|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle$ の線型結合で表す。

$$|e_x\rangle = C_1|\vec{m}\rangle + C_2|-\vec{m}\rangle \quad (4.26)$$

この式から Alice の測定結果 1、-1 が現れるそれぞれの確率 $|C_1|^2, |C_2|^2$ が求められる。

$$|C_1|^2 = |\langle \vec{m} | e_x \rangle|^2 = \frac{1 + m_x}{2}$$

$$|C_2|^2 = |\langle -\vec{m} | e_x \rangle|^2 = \frac{1 - m_x}{2}$$

Alice の測定結果 1、-1 が現れる確率は

$$\begin{cases} \text{確率 } \frac{1+m_x}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1-m_x}{2} \text{ で } -1 \end{cases}$$

(ii) King の測定結果が -1 の場合

King の測定結果が -1 だった場合、Alice に返ってくる qubit は $| -e_x \rangle$ という状態である。この qubit に対して演算子 B で測定したとすると、次式のように $|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle$ の線型結合で表すことができる。

$$| -e_x \rangle = C'_1|\vec{m}\rangle + C'_2|-\vec{m}\rangle \quad (4.27)$$

この式から Alice の測定結果 1、-1 が現れるそれぞれの確率 $|C'_1|^2, |C'_2|^2$ が求められる。

$$|C'_1|^2 = |\langle \vec{m} | -e_x \rangle|^2 = \frac{1 - m_x}{2}$$

$$|C'_2|^2 = |\langle -\vec{m} | -e_x \rangle|^2 = \frac{1 + m_x}{2}$$

Alice の測定結果 1、-1 が現れる確率は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{確率 } \frac{1-m_x}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1+m_x}{2} \text{ で } -1 \end{array} \right.$$

(II) Kingが σ_y の測定を行う場合 } についても同様に計算できる。
 (III) Kingが σ_z の測定を行う場合 }

以上から測定結果の確率を表にまとめると

表 4.2: σ_x の測定結果の確率

		σ_x	
		1	-1
Alice の 測定結果	1	$\frac{1}{4}(1+n_x)(1+m_x)$	$\frac{1}{4}(1-n_x)(1-m_x)$
	-1	$\frac{1}{4}(1+n_x)(1-m_x)$	$\frac{1}{4}(1-n_x)(1+m_x)$

σ_y, σ_z についても同様に書ける。

この表から Alice が King の測定結果を正しく推定するにはどうすればよいか。もし、Alice の測定結果が 1 だったとすると、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合のそれぞれの現れる確率を比べて大きい方を言えば、正しく推定する確率も大きくなるはずである。よって、Alice の測定結果が 1 の場合、-1 の場合について正しく推定する確率を求める。

Alice の測定結果が 1 の場合、正しく推定する確率 $P_{x(1)}$ を計算する。

$$\begin{aligned} P_{x(1)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(1+n_x m_x) \cdot \max\left\{ \frac{(1+n_x)(1+m_x)}{2(1+n_x m_x)}, \frac{(1-n_x)(1-m_x)}{2(1+n_x m_x)} \right\} \\ &= \frac{1}{12} \max\{ (1+n_x+m_x+n_x m_x), (1-n_x-m_x+n_x m_x) \} \\ &= \frac{1}{12} \{ (1+n_x m_x) + \max(n_x+m_x, -(n_x+m_x)) \} \\ &= \frac{1}{12} (1+n_x m_x + |n_x+m_x|) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Alice の測定結果が-1 の場合の確率 $P_{x(-)}$ についても同様の計算で求められる。

$$\begin{aligned} P_{x(-)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (1 + n_x m_x) \cdot \max\left\{ \frac{(1 + n_x)(1 - m_x)}{2(1 - n_x m_x)}, \frac{(1 - n_x)(1 + m_x)}{2(1 - n_x m_x)} \right\} \\ &= \frac{1}{12} (1 - n_x m_x + |n_x - m_x|) \end{aligned} \quad (4.29)$$

ただし記号 $\max(\dots, \dots)$ は括弧内のうち、どちらか大きい方という意味である。

σ_y, σ_z についても同様に計算できる。

よって Alice が King の測定結果を 1 か -1 が正しく推定する確率 P は

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{12} \{ (1 + n_x m_x + |n_x + m_x|) + (1 - n_x m_x + |n_x - m_x|) \\ &\quad + (1 + n_y m_y + |n_y + m_y|) + (1 - n_y m_y + |n_y - m_y|) \\ &\quad + (1 + n_z m_z + |n_z + m_z|) + (1 - n_z m_z + |n_z - m_z|) \} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} (|n_x + m_x| + |n_x - m_x| + |n_y + m_y| + |n_y - m_y| + |n_z + m_z| + |n_z - m_z|) \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる。ここで n_x, n_y, n_z は \vec{n} の x, y, z 方向成分、 m_x, m_y, m_z は \vec{m} の x, y, z 方向成分である。

次に、この確率について \vec{n}, \vec{m} に関する最適化を行い、最大値 P_{\max} を求める。

ここでは、 x 成分についてのみ考えることにする。

まず、(i) $n_x > m_x$, (ii) $-m_x < n_x < m_x$, (iii) $|n_x| > m_x$, (iv) $n_x < m_x$ と場合分けして考える。

(i) $n_x > m_x$

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| = (n_x + m_x) + (n_x - m_x) = 2n_x \quad (4.31)$$

(ii) $-m_x < n_x < m_x$

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| = (n_x + m_x) - (n_x - m_x) = 2m_x \quad (4.32)$$

(iii) $|n_x| > m_x$

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| = -(n_x + m_x) + (n_x - m_x) = -2m_x \quad (4.33)$$

(iv) $n_x < m_x$

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| = -(n_x + m_x) - (n_x - m_x) = -2n_x \quad (4.34)$$

(i),(ii),(iii),(iv) から次式が成り立つことがわかる。

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| = \pm 2A_x \quad (4.35)$$

ここで A_x とは場合によって n_x, m_x のどちらかをとる変数と定義する。
 y, z 方向についても同様に計算できる。

$$|n_y + m_y| + |n_y - m_y| = \pm 2B_y \quad (4.36)$$

$$|n_z + m_z| + |n_z - m_z| = \pm 2C_z \quad (4.37)$$

以上から

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| + |n_y + m_y| + |n_y - m_y| + |n_z + m_z| + |n_z - m_z| = \pm 2A_x \pm 2B_y \pm 2C_z \quad (4.38)$$

符号の組み合わせで8通り、 n_a, m_a の組み合わせで8通りあるので、計64通りの組み合わせがある。しかし、King の測定方向が直交しているので符号が-だったとしても-方向を基準に正ととることができるので、符号がすべて+の場合として考えることができる。また \vec{n} と \vec{m} は同じ一般方向の単位ベクトルなので入れ替えることができる。よって、今、考えている場合では次の2通りを考えればよい。

$$\begin{cases} (1) & n_x + n_y + n_z \\ (2) & n_x + n_y + m_z \end{cases}$$

(1) の場合

$$n_x + n_y + n_z = (1, 1, 1) \cdot \vec{n}$$

ここで、シュバルツの不等式 $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ を用いると

$$n_x + n_y + n_z \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot |\vec{n}| = \sqrt{3} \quad (4.39)$$

(2) の場合

$$n_x + n_y + m_z = (1, 1, 0) \cdot \vec{n} + (0, 0, 1) \cdot \vec{m}$$

ここで、シュバルツの不等式を用いると

$$\begin{cases} (1, 1, 0) \cdot \vec{n} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 0} \cdot |\vec{n}| = \sqrt{2} \\ (0, 0, 1) \cdot \vec{m} \leq \sqrt{0 + 0 + 1^2} \cdot |\vec{m}| = 1 \end{cases}$$

よって

$$n_x + n_y + m_z \leq \sqrt{2} + 1 \quad (4.40)$$

(1),(2) から

$$|n_x + m_x| + |n_x - m_x| + |n_y + m_y| + |n_y - m_y| + |n_z + m_z| + |n_z - m_z| \leq 2(\sqrt{2} + 1)$$

よって、最大値 P_{\max} は

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} \doteq 0.90 \end{aligned}$$

この最大値を実現する \vec{n}, \vec{m} の組み合わせの例として次のような組み合わせが挙げられる。

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \vec{m} = (0, 0, 1) \quad (4.41)$$

エンタングルした状態を使わない場合、Alice が King の測定結果を正しく推定する確率は約 90% と求まった。エンタングルした状態を使った場合、正しく推定する確率が 100% だった。このことからエンタングルした状態の有効性というものがわかる。

第5章 Kingの測定が直交しない3方向 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つの場合

Kingの測定が直交しない3方向のスピン $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つでエンタングルした状態を使わない場合と使う場合ではどうなるか調べてみる。ただし、 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ は、 a, b, c 方向それぞれのスピン成分を表す。

5.1 エンタングルした状態を使わない場合

まず、エンタングルした状態を使わない場合について調べてみる。

$$|\vec{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle \quad (5.1)$$

というある一般の方向を向いた qubit を Alice が用意し、その qubit を King に渡す。King は、渡された qubit に対して $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つの測定を行う。そして、Alice に返す。

返ってきた qubit に対して \vec{n} とは異なる一般の方向の $|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle$ という基底を持つ演算子 C で測定する。Alice の測定後、King は Alice に測定した方向のみを教える。Alice は King の測定方向と qubit の状態から King の測定結果を推定する。

ここで、 e_a, e_b, e_c は a, b, c 方向それぞれの単位方向ベクトルを表し、 $|e_a\rangle, |e_b\rangle, |e_c\rangle$ は a, b, c 方向それぞれの基底を表す。また、 \vec{n} の a, b, c 方向成分は (n_a, n_b, n_c) 、 \vec{m} の a, b, c 方向成分は (m_a, m_b, m_c) で定義される。

King の測定が $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ の3つの場合についてそれぞれ調べてみる。

(I) King が σ_a の測定をする場合

King が qubit に対して σ_a の測定をした場合を調べるため、 $|\vec{n}\rangle$ は次式のように書く。

$$|\vec{n}\rangle = a|e_a\rangle + b| -e_a\rangle \quad (5.2)$$

この式から King の測定結果 1、-1 が現れるそれぞれの確率 $|a|^2, |b|^2$ を求める。

$$|a|^2 = |\langle e_a | \vec{n} \rangle|^2 = \frac{1 + n_a}{2}$$

$$|b|^2 = |\langle -e_a | \vec{n} \rangle|^2 = \frac{1 - n_a}{2}$$

よって、King の測定結果 1、-1 が現れる確率は

$$\begin{cases} \text{確率 } \frac{1+n_a}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1-n_a}{2} \text{ で } -1 \end{cases}$$

King の測定結果が 1、-1 の場合について、それぞれ考える。

(i) King の測定結果が 1 の場合

King の測定結果が 1 だった場合、Alice に返ってくる qubit は $|e_a\rangle$ という状態である。この qubit に対して演算子 C で測定した場合を調べるため、次式のように $|\vec{m}\rangle$ 、 $|-\vec{m}\rangle$ の線型結合で表す。

$$|e_a\rangle = C_1 |\vec{m}\rangle + C_2 |-\vec{m}\rangle \quad (5.3)$$

この式から Alice の測定結果 1、-1 が現れるそれぞれの確率 $|C_1|^2$ 、 $|C_2|^2$ が求められる。

$$|C_1|^2 = |\langle \vec{m} | e_a \rangle|^2 = \frac{1 + m_a}{2}$$

$$|C_2|^2 = |\langle -\vec{m} | e_a \rangle|^2 = \frac{1 - m_a}{2}$$

Alice の測定結果 1、-1 が現れる確率は

$$\begin{cases} \text{確率 } \frac{1+m_a}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1-m_a}{2} \text{ で } -1 \end{cases}$$

(ii) King の測定結果が -1 の場合

King の測定結果が -1 だった場合、Alice に返ってくる qubit は $|-e_a\rangle$ という状態である。この qubit に対して演算子 C で測定した場合を調べるため、次式のように $|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle$ の線型結合で表す。

$$|-e_a\rangle = C'_1|\vec{m}\rangle + C'_2|-\vec{m}\rangle$$

この式から Alice の測定結果 $1, -1$ が現れる確率 $|C'_1|, |C'_2|$ が求められる。

$$|C'_1|^2 = |\langle \vec{m} | -e_a \rangle|^2 = \frac{1 - m_a}{2}$$

$$|C'_2|^2 = |\langle -\vec{m} | -e_a \rangle|^2 = \frac{1 + m_a}{2}$$

Alice の測定結果 $1, -1$ が現れる確率は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{確率 } \frac{1-m_a}{2} \text{ で } 1 \\ \text{確率 } \frac{1+m_a}{2} \text{ で } -1 \end{array} \right.$$

(II) King が σ_b の測定を行う場合 } についても同様に計算できる。
 (III) King が σ_c の測定を行う場合 }

以上から測定結果の確率を表にまとめると

表 5.1: エンタングルした状態を使わない場合の σ_a の測定結果の確率

		σ_a	
		1	-1
Alice の 測定結果	1	$\frac{1}{4}(1+n_a)(1+m_a)$	$\frac{1}{4}(1-n_a)(1-m_a)$
	-1	$\frac{1}{4}(1+n_a)(1-m_a)$	$\frac{1}{4}(1-n_a)(1+m_a)$

σ_b, σ_c についても同様に書ける。

表 5.1 から Alice が King の測定結果を正しく推定するにはどうすればよいか。もし、Alice の測定結果が 1 だったとすると、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合のそれぞれの現れる確率を比べて大きい方を言えば、正しく推定する確率も大きくなるはずである。

よって、Alice の測定結果が 1 の場合、-1 の場合について正しく推定する確率を求めらる。

Alice の測定結果が 1 の場合、正しく推定する確率 $P_{a(1)}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
P_{a(1)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(1 + n_a m_a) \cdot \max\left\{ \frac{(1 + n_a)(1 + m_a)}{2(1 + n_a m_a)}, \frac{(1 - n_a)(1 - m_a)}{2(1 + n_a m_a)} \right\} \\
&= \frac{1}{12} \max\{ (1 + n_a + m_a + n_a m_a), (1 - n_a - m_a + n_a m_a) \} \\
&= \frac{1}{12} \{ (1 + n_a m_a) + \max(n_a + m_a, -(n_a + m_a)) \} \\
&= \frac{1}{12} (1 + n_a m_a + |n_a + m_a|) \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Alice の測定結果が -1 の場合の確率 $P_{a(-1)}$ についても同様の計算で求められる。

$$\begin{aligned}
P_{a(-1)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(1 + n_a m_a) \cdot \max\left\{ \frac{(1 + n_a)(1 - m_a)}{2(1 - n_a m_a)}, \frac{(1 - n_a)(1 + m_a)}{2(1 - n_a m_a)} \right\} \\
&= \frac{1}{12} (1 - n_a m_a + |n_a - m_a|) \tag{5.5}
\end{aligned}$$

ただし記号 $\max(\dots, \dots)$ は括弧内のうち、どちらか大きい方という意味である。

σ_b, σ_c についても同様に計算できる。

よって Alice が King の測定結果を 1 か -1 が正しく推定する確率 $P_{1\text{qub}}$ は

$$\begin{aligned}
P_{1\text{qub}} &= \frac{1}{12} \{ (1 + n_a m_a + |n_a + m_a|) + (1 - n_a m_a + |n_a - m_a|) \\
&\quad + (1 + n_b m_b + |n_b + m_b|) + (1 - n_b m_b + |n_b - m_b|) \\
&\quad + (1 + n_c m_c + |n_c + m_c|) + (1 - n_c m_c + |n_c - m_c|) \} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} (|n_a + m_a| + |n_a - m_a| + |n_b + m_b| + |n_b - m_b| + |n_c + m_c| + |n_c - m_c|) \tag{5.6}
\end{aligned}$$

となる。ここで n_a, n_b, n_c は \vec{n} の a, b, c 方向成分、 m_a, m_b, m_c は \vec{m} の a, b, c 方向成分である。

次に、この確率について \vec{n} , \vec{m} に関する最適化を行い、最大値 P_{\max} を求める。

ここでは、a 成分についてのみ考えることにする。

まず、(i) $n_a > m_a$, (ii) $-m_a < n_a < m_a$, (iii) $|n_a| > m_a$, (iv) $n_a < m_a$ と場合分けして考える。

(i) $n_a > m_a$

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| = (n_a + m_a) + (n_a - m_a) = 2n_a \quad (5.7)$$

(ii) $-m_a < n_a < m_a$

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| = (n_a + m_a) - (n_a - m_a) = 2m_a \quad (5.8)$$

(iii) $|n_a| > m_a$

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| = -(n_a + m_a) + (n_a - m_a) = -2m_a \quad (5.9)$$

(iv) $n_a < m_a$

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| = -(n_a + m_a) - (n_a - m_a) = -2n_a \quad (5.10)$$

(i),(ii),(iii),(iv) から次式が成り立つことがわかる。

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| = \pm 2A'_a \quad (5.11)$$

ここで A'_a とは場合によって n_a , m_a のどちらかをとる変数と定義する。

b, c についても同様に計算できる。

$$|n_b + m_b| + |n_b - m_b| = \pm 2B'_b \quad (5.12)$$

$$|n_c + m_c| + |n_c - m_c| = \pm 2C'_c \quad (5.13)$$

以上から

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| + |n_b + m_b| + |n_b - m_b| + |n_c + m_c| + |n_c - m_c| = \pm 2A'_a \pm 2B'_b \pm 2C'_c \quad (5.14)$$

符号の組み合わせで8通り、 n_a, m_a の組み合わせで8通りあるので、計64通りの組み合わせがある。しかし、 \vec{n} と \vec{m} は同じ一般方向の単位ベクトルなので入れ替えることができる。また、例えば、 $-A'_a - B'_b - C'_c$ は負の方向を基準にして正ととれば $A'_a + B'_b + C'_c$ と同等とみなせる。他の場合も同様に考えられる。よって、今、考えている場合では次の6通りを考えればよい。

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) n_a + n_b + m_c \\ (2) n_a + m_b + n_c \\ (3) m_a + n_b + n_c \\ (4) n_a - n_b + m_c \\ (5) n_a + m_b - n_c \\ (6) m_a + n_b - n_c \end{array} \right.$$

(1)~(6)に対して、シュバルツの不等式を用いて、計算すると次のような結果が得られる。

$$|n_a + m_a| + |n_a - m_a| + |n_b + m_b| + |n_b - m_b| + |n_c + m_c| + |n_c - m_c| \leq 2(D_{\max} + 1) \quad (5.15)$$

ここで D_{\max} は $|e_a \pm e_b|, |e_b \pm e_c|, |e_a \pm e_c|$ の6方向のベクトルの大きさのうち、最大のものとする。

D_{\max} を用いて最大値 $P_{1\text{qubmax}}$ を求めると

$$P_{1\text{qubmax}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(D_{\max} + 1) \quad (5.16)$$

最大値を実現する \vec{n}, \vec{m} の例として $D_{\max} = |e_a + e_b|$ ならば

$$\vec{n} = \frac{e_a + e_b}{|e_a + e_b|}, \vec{m} = e_c \quad (5.17)$$

となる。

5.2 エンタングルした状態を使う場合

次に、エンタングルした状態を使う場合について調べる。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle) \quad (5.18)$$

というエンタングルした状態の qubit を Alice が用意する。Alice は 1 つめの qubit を King に渡し、2 つめの qubit は自分自身が持つておく。

King は渡された qubit に対して $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか 1 つの測定を行う。そして、Alice に返す。

Alice は、返ってきた qubit と持っていた qubit との 2 qubit に対して $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ という 4 つの正規直交基底を固有状態に持つ演算子 A による測定を行う。Alice の測定後、King は Alice に測定した方向のみを教える。

Alice は King の測定方向と qubit の状態から King の測定結果を推定する。

演算子 A の 4 つの正規直交基底については、直交する 3 方向の King 問題で Vaidman らによって用いられたものと同じ基底を使うことにする。

$$\begin{cases} |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle)e^{i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle)e^{i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle)e^{-i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}} \\ |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle_{\text{ext}}|\downarrow\rangle)e^{-i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\text{ext}}|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \quad (5.19)$$

ここで、 a_x, a_y, a_z は e_a の x, y, z 方向成分、 b_x, b_y, b_z は e_b の x, y, z 方向成分、 c_x, c_y, c_z は e_c の x, y, z 方向成分と定義する。

King の測定が $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ の 3 つの場合についてそれぞれ調べてみる。

(I) King が σ_a の測定を行う場合

a 方向の基底は次式のように定義される。

$$\begin{cases} |e_a\rangle = \cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle \\ | - e_a\rangle = \cos\frac{\pi-\theta_a}{2}|\uparrow\rangle + e^{i(\pi+\phi_a)}\sin\frac{\pi-\theta_a}{2}|\downarrow\rangle = \sin\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle - e^{i\phi_a}\cos\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle \end{cases} \quad (5.20)$$

この a 方向の基底を用いると $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ は次式で表される。

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \cos\frac{\theta_a}{2}|e_a\rangle + \sin\frac{\theta_a}{2}| - e_a\rangle \\ |\downarrow\rangle = e^{-i\phi_a}(\sin\frac{\theta_a}{2}|e_a\rangle - \cos\frac{\theta_a}{2}| - e_a\rangle) \end{cases} \quad (5.21)$$

ここで King が qubit に対して、 σ_a の測定をした場合を調べるため、 $|\Psi\rangle$ は次式のよ
うに書き換える。

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\cos \frac{\theta_a}{2}|e_a\rangle + \sin \frac{\theta_a}{2}| - e_a\rangle)|\uparrow\rangle + e^{-i\phi_a}(\sin \frac{\theta_a}{2}|e_a\rangle - \cos \frac{\theta_a}{2}| - e_a\rangle)|\downarrow\rangle\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|e_a\rangle(\cos \frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle + e^{-i\phi_a} \sin \frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle) + | - e_a\rangle(\sin \frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle - e^{-i\phi_a} \cos \frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle)\}
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

この式で

$$\begin{cases}
 |\bar{e}_a\rangle = \cos \frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle + e^{-i\phi_a} \sin \frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle \\
 |-\bar{e}_a\rangle = \sin \frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle - e^{-i\phi_a} \cos \frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle
 \end{cases}
 \tag{5.23}$$

とおくと

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_a\rangle|\bar{e}_a\rangle + |e_a\rangle|-\bar{e}_a\rangle)
 \tag{5.24}$$

この式は King の測定結果が $\begin{cases} \text{確率} \frac{1}{2} \text{で } 1 \\ \text{確率} \frac{1}{2} \text{で } -1 \end{cases}$ となることを表す。

よって、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合についてそれぞれ考える。

(i) King の測定結果が 1 の場合

King の測定結果が 1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$\begin{aligned}
|e_a\rangle|\bar{e}_a\rangle &= (\cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle)(\cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle + e^{-i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle) \\
&= \cos^2\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + e^{-i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle \\
&\quad + e^{i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \sin^2\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Alice はこの 2 qubit $|e_a\rangle|\bar{e}_a\rangle$ に対して演算子 A で測定をした場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$|e_a\rangle|\bar{e}_a\rangle = C_1|\phi_1\rangle + C_2|\phi_2\rangle + C_3|\phi_3\rangle + C_4|\phi_4\rangle \tag{5.26}$$

この式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C_1|^2, |C_2|^2, |C_3|^2, |C_4|^2$ が求められる。

$$\begin{aligned}
|C_1|^2 &= |\langle\phi_1|e_a\rangle|\bar{e}_a\rangle|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\langle\uparrow| + \frac{1}{2}(\langle\uparrow|\langle\downarrow|e^{-i\frac{\pi}{4}} + \langle\downarrow|\langle\uparrow|e^{i\frac{\pi}{4}})\right. \\
&\quad \left.\{\cos^2\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + e^{-i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle\right. \\
&\quad \left.+ e^{i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \sin^2\frac{\theta_a}{2}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\right\}|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\frac{\theta_a}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\phi_a}\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{2\cos^2\frac{\theta_a}{2} + (e^{i\phi_a} + e^{-i\phi_a})\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2} + (e^{i\phi_a} - e^{-i\phi_a})i\sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\right\}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\cos\theta_a + 1 + \frac{1}{2}(e^{i\phi_a} + e^{-i\phi_a})\sin\theta_a + \frac{1}{2}(e^{i\phi_a} - e^{-i\phi_a})i\sin\theta_a\right\}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\cos\theta_a + \frac{1}{2}\sin\theta_a(e^{i\phi_a} + e^{-i\phi_a} + (e^{i\phi_a} - e^{-i\phi_a})i) + 1\right\}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\cos\theta_a + \sin\theta_a(\cos\phi_a - \sin\phi_a) + 1\right\}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}(a_x - a_y + a_z + 1)\right|^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}(a_x - a_y + a_z + 1)^2$$

以下も同様の計算により求められる。

$$|C_2|^2 = |\langle \phi_2 | e_a \rangle | \overline{e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(-a_x + a_y + a_z + 1)^2$$

$$|C_3|^2 = |\langle \phi_3 | e_a \rangle | \overline{e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(a_x + a_y - a_z + 1)^2$$

$$|C_4|^2 = |\langle \phi_4 | e_a \rangle | \overline{e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(a_x - a_y - a_z + 1)^2$$

(ii) King の測定結果が -1 の場合

King の測定結果が -1 の場合であったら、測定後の全系は次のような状態をとる。

$$\begin{aligned} | -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle &= (\sin \frac{\theta_a}{2} | \uparrow \rangle - e^{i\phi_a} \cos \frac{\theta_a}{2} | \downarrow \rangle)(\sin \frac{\theta_a}{2} | \uparrow \rangle - e^{-i\phi_a} \cos \frac{\theta_a}{2} | \downarrow \rangle) \\ &= \sin^2 \frac{\theta_a}{2} | \uparrow \rangle | \uparrow \rangle - e^{-i\phi_a} \sin \frac{\theta_a}{2} \cos \frac{\theta_a}{2} 2 | \uparrow \rangle | \downarrow \rangle \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$-e^{i\phi_a} \sin \frac{\theta_a}{2} \cos \frac{\theta_a}{2} | \downarrow \rangle | \uparrow \rangle + \cos^2 \frac{\theta_a}{2} | \downarrow \rangle | \downarrow \rangle \quad (5.28)$$

Alice はこの 2 qubit $| -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle$ に対して演算子 A で測定をした場合を調べるため、次式のように $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の線型結合で表す。

$$| -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle = C'_1 |\phi_1\rangle + C'_2 |\phi_2\rangle + C'_3 |\phi_3\rangle + C'_4 |\phi_4\rangle$$

この式から Alice の測定結果 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ が現れるそれぞれの確率 $|C'_1|^2, |C'_2|^2, |C'_3|^2, |C'_4|^2$ が求められる。

$$|C'_1|^2 = |\langle \phi_1 | -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(-a_x + a_y - a_z + 1)^2$$

$$|C'_2|^2 = |\langle \phi_2 | -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(a_x - a_y - a_z + 1)^2$$

$$|C'_3|^2 = |\langle \phi_3 | -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(-a_x - a_y + a_z + 1)^2$$

$$|C'_4|^2 = |\langle \phi_4 | -e_a \rangle | \overline{-e_a} \rangle|^2 = \frac{1}{8}(a_x + a_y + a_z + 1)^2$$

(II) Kingが σ_y の測定を行う場合 } についても同様に計算できる。
 (III) Kingが σ_z の測定を行う場合 }

測定結果の確率を表にまとめると

表 5.2: エンタングルした状態を使う場合の σ_a の測定結果の確率

		σ_a	
		1	-1
Alice の 測定結果	ϕ_1	$\frac{1}{8}(a_x - a_y + a_z + 1)^2$	$\frac{1}{8}(-a_x + a_y - a_z + 1)^2$
	ϕ_2	$\frac{1}{8}(-a_x + a_y + a_z + 1)^2$	$\frac{1}{8}(a_x - a_y - a_z + 1)^2$
	ϕ_3	$\frac{1}{8}(a_x + a_y - a_z + 1)^2$	$\frac{1}{8}(-a_x - a_y + a_z + 1)^2$
	ϕ_4	$\frac{1}{8}(-a_x - a_y - a_z + 1)^2$	$\frac{1}{8}(a_x + a_y + a_z + 1)^2$

σ_b, σ_c についても同様に書ける。

この表から Alice が King の測定結果を正しく推定するにはどうすればよいか。もし、Alice の測定結果が $|\phi_1\rangle$ だったとすると、King の測定結果が 1 の場合、-1 の場合のそれぞれの起こる確率を比べて大きい方を言えば、正しく推定する確率も大きくなるはずである。よって、Alice の測定結果が $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ の場合について正しく推定する確率を求める。

Alice の測定結果が $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ のそれぞれの場合について正しく推定する確率 $P_{a(1)}, P_{a(2)}, P_{a(3)}, P_{a(4)}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
P_{a(1)} &= \max\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(a_x - a_y + a_z + 1)^2, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(-a_x + a_y - a_z + 1)\right\} \\
&= \frac{1}{16} \max(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - 2a_x a_y - 2a_y a_z + 2a_x a_z + 2a_x - 2a_y + 2a_z + 1, \\
&\quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - 2a_x a_y - 2a_y a_z + 2a_x a_z - 2a_x + 2a_y - 2a_z + 1) \\
&= \frac{1}{8} \{1 - a_x a_y - a_y a_z + a_x a_z + \max(a_x - a_y + a_z, -(a_x - a_y + a_z))\} \\
&= \frac{1}{8} (1 - a_x a_y - a_y a_z + a_x a_z + |a_x - a_y + a_z|) \tag{5.29}
\end{aligned}$$

以下も同様の計算により求められる。

$$\begin{aligned}
P_{a(2)} &= \max\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(-a_x + a_y + a_z + 1)^2, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(a_x - a_y - a_z + 1)\right\} \\
&= \frac{1}{8} (1 - a_x a_y + a_y a_z - a_x a_z + |-a_x + a_y + a_z|) \tag{5.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{a(3)} &= \max\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(a_x + a_y - a_z + 1)^2, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(-a_x - a_y + a_z + 1)\right\} \\
&= \frac{1}{8} (1 + a_x a_y - a_y a_z - a_x a_z + |a_x + a_y - a_z|) \tag{5.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{a(4)} &= \max\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(-a_x - a_y - a_z + 1)^2, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(a_x + a_y + a_z + 1)\right\} \\
&= \frac{1}{8} (1 + a_x a_y + a_y a_z + a_x a_z + |a_x + a_y + a_z|) \tag{5.32}
\end{aligned}$$

b, c についても同様に計算できる。

よって Alice が King の測定結果を 1 か -1 が正しく推定する確率 $P_{2\text{qub}}$ は

$$\begin{aligned}
P_{2\text{qub}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} (|-a_x + a_y + a_z| + |a_x - a_y + a_z| + |a_x + a_y - a_z| + |a_x + a_y + a_z| \\
&\quad + |-b_x + b_y + b_z| + |b_x - b_y + b_z| + |b_x + b_y - b_z| + |b_x + b_y + b_z| \\
&\quad + |-c_x + c_y + c_z| + |c_x - c_y + c_z| + |c_x + c_y - c_z| + |c_x + c_y + c_z|) \tag{5.33}
\end{aligned}$$

となることがわかった。ここで a_x, a_y, a_z は e_a の x, y, z 方向成分、 b_x, b_y, b_z は e_b の x, y, z 方向成分、 c_x, c_y, c_z は e_c の x, y, z 方向成分である。

5.3 確率の変化

King の測定が直交しない3方向 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つの場合でエンタングルした状態を使う場合、使わない場合の確率が求められた。求めた確率の式を使って、次のような場合の確率のグラフを作成する。

図のように King が測定する方向を e_a を x 軸方向、 e_b を y 軸方向にとり、 e_c を z 軸とのなす角が θ となるようにとった場合について考える。ただし、 e_c は e_b と直交しているものとする。縦軸を確率 P 、横軸を θ としてグラフを作成する。

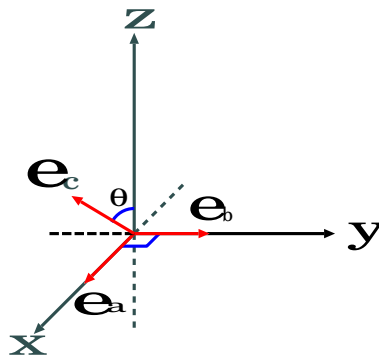


図 5.1: King が測定したスピン成分 (1)

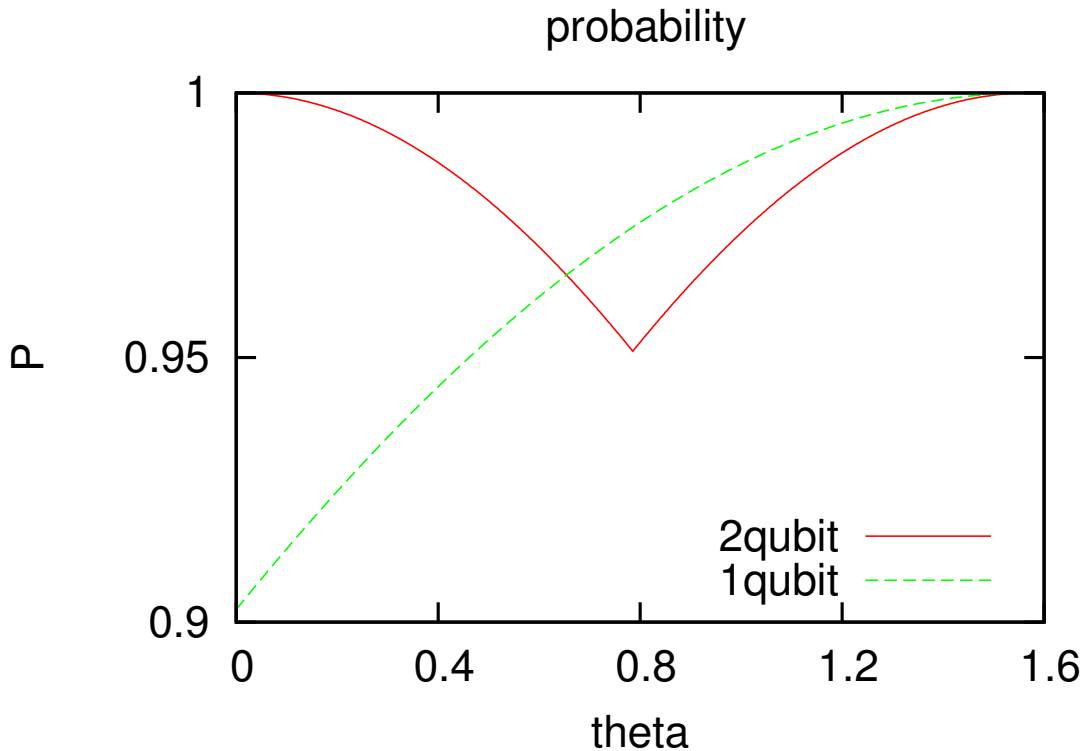


図 5.2: 確率の変化

1 qubit の線がエンタングルした状態を使わない場合の確率の変化で、2 qubit の線がエンタングルした状態を使う場合の確率の変化である。

まず、エンタングルした状態を使わない場合は、 θ が大きくなると確率も大きくなる。今、考えている場合では、 e_a と e_b 、 e_b と e_c は直交しているので、 $|e_a \pm e_b|$ 、 $|e_b \pm e_c|$ は常に一定である。そのため、 θ が大きくなると e_a と e_c とのなす角が小さくなり、 $|e_a + e_c|$ が他のベクトル $|e_a \pm e_b|$ 、 $|e_b \pm e_c|$ よりも大きくなるからである。また、エンタングルした状態を使う場合は、確率は θ が 0 から $\frac{\pi}{4}$ までは小さくなっていき、 $\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{2}$ までは大きくなっていく。これは、Alice が用意する qubit や Alice の測定で使う演算子 A を Vaidman らの方法で用いたものと同じものを利用したからで、Vaidman らは、King の測定方向が直交した 3 方向の時、確率が最大となるように最適化しているため、z 軸からも x 軸からも一番離れたところ $\frac{\pi}{4}$ で最小値をとる。

次に、エンタングルした状態を使う場合と使わない場合の確率を比べてみる。 θ が 0.7 付近まではエンタングルした状態を使う場合の確率が使わない場合の確率を上回っているが、 θ が 0.7 付近を越えるとエンタングルした状態を使わない場合の確率が使う場合の確率を上回ってしまう。これは、Alice が用意する qubit や Alice の測定で使う演算子 A を Vaidman らの方法で用いたものと同じものを利用したからである。このことから使う場合の確率を求めるときに qubit や演算子 A の最適化を行う必要がある。

θ が $\frac{\pi}{2}$ すなわち e_c と e_a が一致する場合 (図に示すような状態) にはエンタングルを使う場合も使わない場合も確率が 1 となる。なぜ、確率 1 となるのか、理由を考えてみる。エンタングルした状態を使う場合では、King の測定する方向が直交しているので正しく推定することができるのはわかるだろう。エンタングルした状態を使わない場合はどうだろうか。

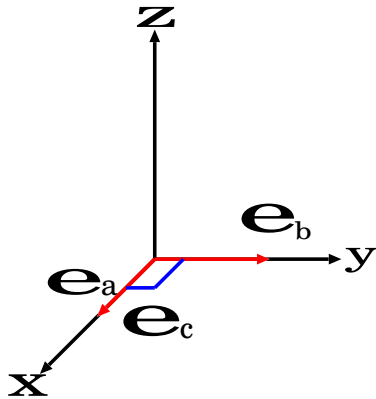


図 5.3: King が測定したスピン成分 (2)

$|e_a\rangle$ の状態の qubit を Alice が用意し、King に渡す。King は、その qubit に対して、測定をする。もし、King が σ_a, σ_c の測定をした場合は、測定結果は必ず 1 となるので、Alice は何の測定をせずとも返ってきた qubit の状態から推定することができる。一方、King が σ_b の測定をした場合は、Alice は返ってきた qubit に対して、 $|e_b\rangle, |-e_b\rangle$ を基底にもつ演算子で測定をすれば、その qubit の状態から推定することができる。

よって、 e_c と e_a が一致する場合にはエンタングルした状態を使う場合も使わない場合も確率 1 となることが確かめられた。

第6章 結論

6.1 まとめ

まず、King の測定が直交した3方向 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のどれか1つの場合で、Alice がエンタングルした状態を使わない場合の King の測定結果を正しく推定する確率が求められた。エンタングルした状態を使う場合と同じ100%とまではいかないが約90%の確率で推定することができた。これは、自分が予想していたものよりもはるかによい結果が得られた。また結果として、King の測定が直交した3方向の場合、エンタングルした状態の有効性というものがみられた。

次に、King の測定が直交しない3方向 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つの場合で、Alice がエンタングルした状態を使う場合、使わない場合の King の測定結果を正しく推定する確率が求められた。そして求めた確率の式を用いて、グラフを作成した。グラフをみるとエンタングルした状態を使わない場合の確率がエンタングルした状態を使う場合の確率を越えることがあった。考えられる原因としては、エンタングルした状態を使わない場合には Alice が用意する qubit や Alice の測定に使う演算子を最適化したのに対して、エンタングルした状態を使う場合では最適化はせず、直交した3方向の時と同じ状態の qubit や演算子を用いたためである。最適化をすればエンタングルした状態を使わない場合の確率がエンタングルした状態を使う場合の確率を越えることはなくなり、よりよい結果が得られるだろう。また、 e_c と e_a が一致する場合にはエンタングルを使う場合も使わない場合も確率が1となる。これは、King の測定するスピン成分が2方向だけならエンタングルした状態を使わなくても Alice は King の測定結果を推定することができることを示している。

本研究では、King の測定するスピンの2方向を固定して、1方向だけを動かして確率の変化をみたが、もし、3方向ともを動かしてみたら、確率の変化はどうなるのかというのもみるのも非常に興味深い結果が得られるだろう。もっとも確率のあがる3方向を見つけたら、エンタングルした状態を使わない場合でも、100%正しく推定することが可能となるかもしれない。

6.2 今後の課題

今後の課題としては、まず King の測定が直交しない3方向 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ のどれか1つの場合で、Alice がエンタングルした状態を使う場合での、Alice が用意する qubit や Alice の測定に使う演算子を最適化を行うことが挙げられる。また、本研究では、理論の研究だけをした。実際に、装置を組んで、実験したら、本研究で得られた結果と同じ結果が得られるのかを確認するというのも非常に難しいが興味深い課題である。

参考文献

- [1] Lev Vaidman, Yakir Aharonov, and David Z. Albert,
”How to Ascertain the Values of σ_x , σ_y and σ_z of a Spin- $\frac{1}{2}$ Particle”
Phys.Rev. Lett. **58** 1385(1987)
- [2] 竹内繁樹 : 「量子コンピュータ - 超並列計算のからくり 」講談社,
(2005)

謝辞

本論文を作成するにあたり、林明久先生には終始丁寧なご指導をしていただいたことに感謝し、お礼申し上げます。また鈴木敏男先生、田島直樹先生にも本研究及び日常的なことにおいても、実に丁寧な指導、お世話をしていただきました。

本研究に対してご意見をいただいた、多くの理工学科の先生方にもお礼申し上げ、謝辞の言葉とさせていただきます。