Error margin のある量子状態の識別問題

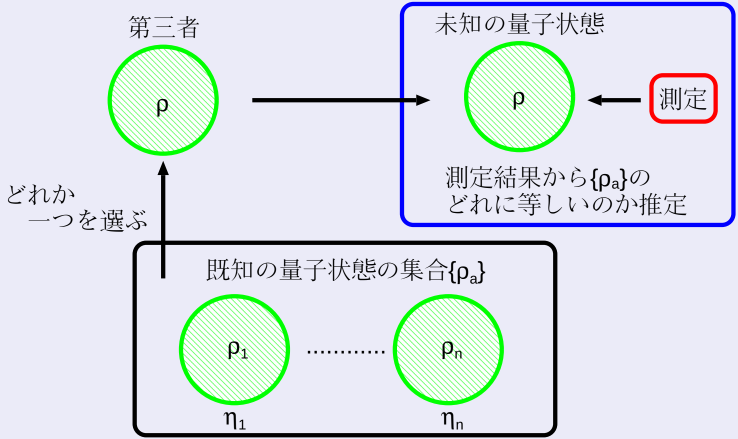
08780048　　杉本宏行

福井大学大学院工学研究科物理工学専攻

修士論文公聴会
2010 年 2 月 15 日

State discrimination

量子状態の識別問題



一般に異なる量子状態を測定によって完全に識別することは不可能

$\Longrightarrow$ 識別成功確率が最大となる測定は?

Two general settings

量子状態の識別問題の考え方として $\cdots$

Minimum-error discrimination

識別に間違いが許される. $\Longrightarrow$ 識別成功確率を最大

$\Downarrow$

結果的に識別が間違う確率を最小

Unambiguous discrimination

識別に間違いが許されない. 代わりに"わからない"と言ってよい.
$\Longrightarrow$ 識別成功確率を最大

$\Longrightarrow$ 本研究では, error margin を導入することで "minimum-error" と "unambiguous" を統一的に扱う.

Discrimination of two pure state

二つの純粋状態の識別問題

- 与えられた状態 $\rho = |\,\phi\,\rangle\langle\,\phi\,|$
- 二つの純粋状態 (線形独立)

$$\begin{cases} \rho_1 = |\,\phi_1\,\rangle\langle\,\phi_1\,|, & \text{発生確率}\eta_1 \\ \rho_2 = |\,\phi_2\,\rangle\langle\,\phi_2\,|, & \text{発生確率}\eta_2 \end{cases} \qquad (\eta_1 + \eta_2 = 1)$$

V : 二つの状態によって張られた二次元部分空間

POVM(Positive Operator-Valued Measure) 測定

- 一般化された射影測定
- POVM 要素 $\{E_\mu\}_{\mu=1,2,3}$

$$\begin{cases} E_1 : \rho \text{ は } \rho_1 \text{ である.} \\ E_2 : \rho \text{ は } \rho_2 \text{ である.} \\ E_3 : \text{"わからない"} \end{cases}$$

$$E_1, E_2, E_3 \geq 0, \quad E_1 + E_2 + E_3 = 1$$

Success probability $P_\circ$ and Mean probability of error $P_\times$

Joint probabilities

与えられた状態が ρ_a かつ測定結果が μ である確率

$$P_{\rho_a,E_\mu} = \eta_a \mathrm{tr}\left[E_\mu \rho_a\right]$$

識別成功確率 $P_\circ$

$$\begin{aligned} P_\circ &\equiv P_{\rho_1,E_1} + P_{\rho_2,E_2} \\ &= \eta_1 \mathrm{tr}\left[E_1\rho_1\right] + \eta_2 \mathrm{tr}\left[E_2\rho_2\right] \end{aligned}$$

平均の間違い確率 $P_\times$

$$\begin{aligned} P_\times &\equiv P_{\rho_1,E_2} + P_{\rho_2,E_1} \\ &= \eta_1 \mathrm{tr}\left[E_2\rho_1\right] + \eta_2 \mathrm{tr}\left[E_1\rho_2\right] \end{aligned}$$

$$P_\circ + P_\times + P_? = 1$$

Error margin

最適化する成功確率

$$P_\circ = \eta_1 \mathrm{tr}\left[E_1\rho_1\right] + \eta_2 \mathrm{tr}\left[E_2\rho_2\right]$$

Error margin m

$$P_\times = \eta_1 \mathrm{tr}\left[E_2\rho_1\right] + \eta_2 \mathrm{tr}\left[E_1\rho_2\right] \leq m$$

$m = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad$ Minimum-error discrimination

$$P_{\circ\,\mathrm{max}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2 \left|\langle \phi_1 \mid \phi_2 \rangle\right|^2}\right)$$

$m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad$ Unambiguous discrimination

$$P_{\circ\,\mathrm{max}} = 1 - 2\sqrt{\eta_1\eta_2}\left|\langle \phi_1 \mid \phi_2 \rangle\right|$$

Primal problem

SDP(semidefinite progarming)$\cdots$ 半正定値計画

実対称行列を変数とし, 線形の目的関数と制約式に加えて, 変数の半正定値条件件が付加された最適化問題

SDP の手法を用いて定式化すると $\cdots$

主問題

maximize :

$$P_\circ = \eta_1 \mathrm{tr}\left[E_1\rho_1\right] + \eta_2 \mathrm{tr}\left[E_2\rho_2\right]$$

subject to :

$$E_1 \geq 0,\ E_2 \geq 0,\ E_3 \geq 0$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = 1$$

$$P_\times = \eta_1 \mathrm{tr}\left[E_1\rho_1\right] + \eta_2 \mathrm{tr}\left[E_2\rho_2\right] \leq m$$

SDP(Semidefinite programing)

Dual problem

双対問題

minimize :

$$d = \mathrm{tr}\,[Y] + my$$

subject to :

$$Y \geq 0, \; y \geq 0$$

$$Y \geq \eta_1\rho_1 - y\eta_2\rho_2, \; Y \geq \eta_2\rho_2 - y\eta_1\rho_1$$

where

Y : V 上の Hermite 行列, y : 実数

$$d_{\mathrm{min}} = P_{\circ\,\mathrm{max}}$$

Optimal measurement

POVM E_1, E_2, E_3 : rank 0 or 1

最適な測定のタイプ

Minimum-error 領域

- $E_3 = 0$ と同時に rank$E_1 = 1$, rank$E_2 = 1$
  $\Longrightarrow$POVM は minimum-error discrimination と一致

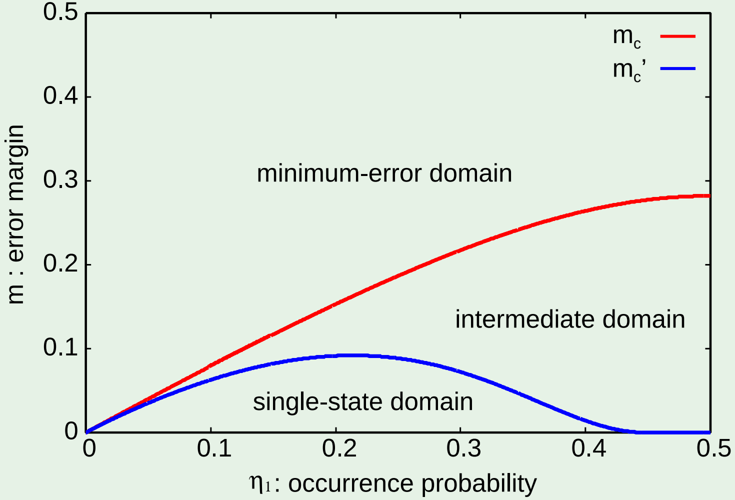
Intermediate 領域

- すべての POVM 要素の rank は 1
- 三つの測定結果を得る確率はゼロでない.

Single-state 領域

- $E_1 = 0$ or $E_2 = 0$
  $\Longrightarrow$ 残りの二つの POVM 要素は rank が 1

Domain



0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
m : error margin
m_c
m_c'
minimum-error domain
intermediate domain
single-state domain
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
η_1: occurrence probability

Optimal success probability I

$$P_{\circ\,\max} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\eta_1\eta_2 S}\right) & (m_c \le m \le 1) \\ \left(\sqrt{m}+\sqrt{1-2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}}\right)^2 & (m_c^{'} \le m \le m_c) \\ \eta_2\left(\sqrt{\frac{m}{\eta_1}S}+\sqrt{\frac{\eta_1 - m}{\eta_1}T}\right)^2 & (0 \le m \le m_c^{'}) \end{cases}$$

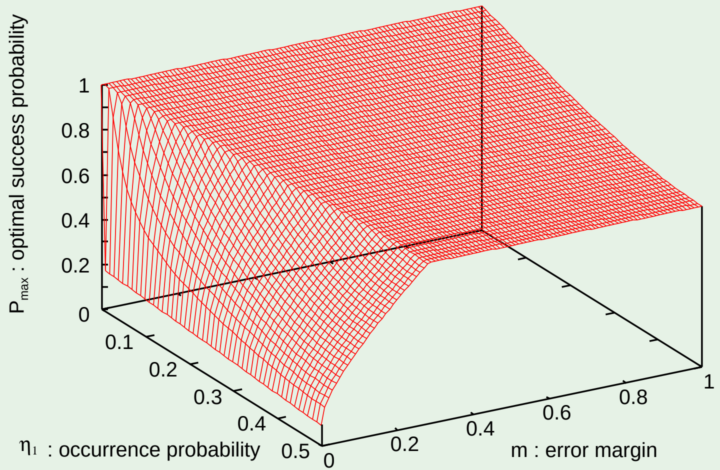
where

$$m_c = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\eta_1\eta_2 S}\right)$$

$$m_c^{'} = \begin{cases} \frac{\left(\eta_1-\sqrt{\eta_1\eta_2 S}\right)^2}{1-2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}} & (\eta_1 \le \eta_2 S) \\ 0 & (\eta_1 \ge \eta_2 S) \end{cases}$$

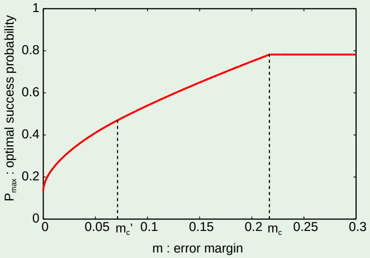
$$S \equiv |\langle\,\phi_1\,|\,\phi_2\,\rangle|^2,\;\; T \equiv 1-|\langle\,\phi_1\,|\,\phi_2\,\rangle|^2$$

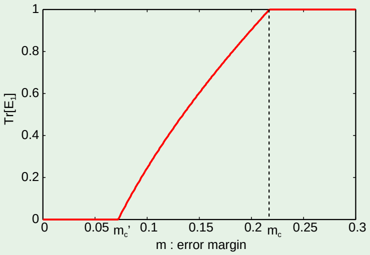
Success probability $P_{\circ\,\mathrm{max}}(m, \eta_1)$



$P_{\circ\,\max}$ and $\mathrm{tr}\,[E_1]$ vs error margin m

$\eta_1 = 0.3$





$$\begin{cases} m_c \leq m \leq 1 & \text{(Minimum-error 領域)} \\ m_c' \leq m \leq m_c & \text{(Intermediate 領域)} \\ 0 \leq m \leq m_c' & \text{(Single-state 領域)} \end{cases}$$

error margin のタイプ

Weak error-margin condition

$$P_\times = P_{E_1,\rho_2} + P_{E_2,\rho_1} \leq m$$

Strong error-margin condition

$$P_{\rho_2|E_1} = \frac{\eta_2 \mathrm{tr}[E_1\rho_2]}{\eta_1\mathrm{tr}[E_1\rho_1] + \eta_2\mathrm{tr}[\mathrm{E}_1\rho_2]} \leq m$$

$$P_{\rho_1|E_2} = \frac{\eta_1 \mathrm{tr}[E_2\rho_1]}{\eta_1\mathrm{tr}[E_2\rho_1] + \eta_2\mathrm{tr}[E_2\rho_2]} \leq m$$

$$\begin{aligned} P_\times &= P_{E_1,\rho_2} + P_{E_2,\rho_1} \\ &= P_{\rho_2|E_1}P_{E_1} + P_{\rho_1|E_2}P_{E_2} \leq m(P_{E_1} + P_{E_2}) \leq m \end{aligned}$$

Relation between "weak" and "strong"

"weak" と "strong" の間にある関係

$$\begin{cases} m^w = \frac{m^s}{1-m^s} P^s_{\circ\,\mathrm{max}}(m^s) \\ \\ m^s = \frac{m^w}{P^w_{\circ\,\mathrm{max}}(m^w)+m^w} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} P^s_{\circ\,\mathrm{max}}(m^s) &= P^w_{\circ\,\mathrm{max}}(m^w) \\ E^s_\mu(m^s) &= E^w_\mu(m^w) \end{aligned}$$

上付き文字 $s \longrightarrow$ "strong"
上付き文字 $w \longrightarrow$ "weak"

Optimal success probability II

$$P^s_{\circ\,\mathrm{max}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\eta_1\eta_2 S}\right) & (m_c \le m \le 1) \\ A_m\left(1-2\sqrt{\eta_1\eta_2 S}\right) & (m_c^{s'} \le m \le m_c) \\ \frac{\eta_1\eta_2(1-m)(1-S)}{m\eta_2+(1-m)\eta_1-2\sqrt{m(1-m)\eta_1\eta_2 S}} & (0 \le m \le m_c^{s'}) \end{cases}$$

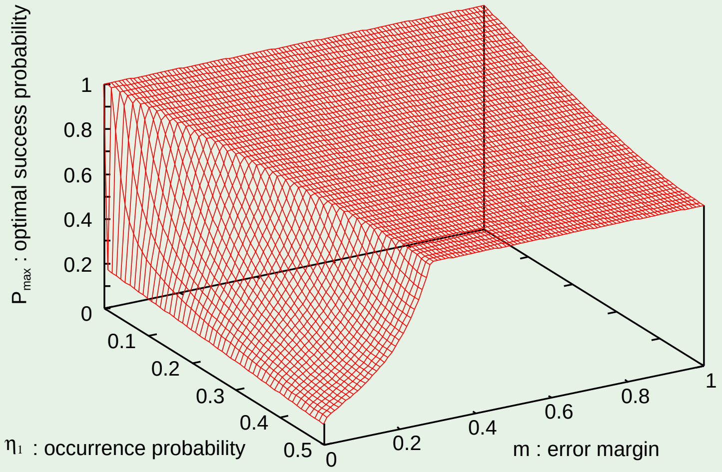
where

$$A_m = \frac{1-m}{(1-2m)^2}\left(1+2\sqrt{m\,(1-m)}\right)$$

$$m_c = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\eta_1\eta_2 S}\right)$$

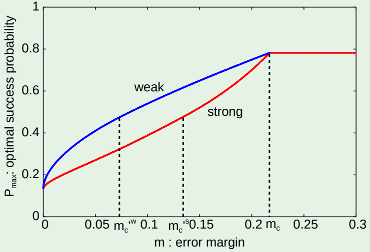
$$m_c^{s'} = \begin{cases} \frac{\left(\eta_1-\sqrt{\eta_1\eta_2 S}\right)^2}{\left(\eta_1-\sqrt{\eta_1\eta_2 S}\right)^2+\left(\eta_2-\sqrt{\eta_1\eta_2 S}\right)^2} & (\eta_1 \le \eta_2 S) \\ 0 & (\eta_1 \ge \eta_2 S) \end{cases}$$

Success probability $P^s_{\circ\,\mathrm{max}}(m, \eta_1)$



Comparison between "strong" and "weak" ($P_{\circ\,\mathrm{max}}$ and tr $[E_1]$ vs error margin m)

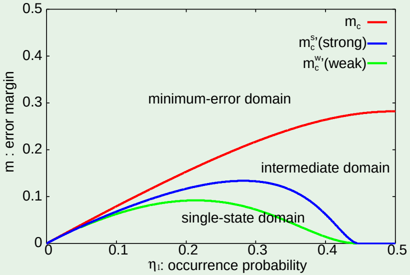
$\eta_1 = 0.3$



$$\begin{cases} m_c \le m \le 1 & \text{(Minimum-error 領域)} \\ m_c' \le m \le m_c & \text{(Intermediate 領域)} \\ 0 \le m \le m_c' & \text{(Single-state 領域)} \end{cases}$$

Summary

- error margin のある二つの純粋状態の識別問題を考察した.
  $\Longrightarrow$ 最適な測定は三つのタイプに分類される.
  $$\Downarrow$$
  それぞれの領域の最適な識別成功確率が求められた.



- error margin には"weak"と"strong"の二つのタイプがある.
  $\Longrightarrow$"weak"と"strong"の間にある関係を証明した.

$$m^w = \frac{m^s}{1-m^s} P^s_{\circ\,\mathrm{max}}(m^s), \qquad m^s = \frac{m^w}{P^w_{\circ\,\mathrm{max}}(m^w) + m^w}$$