卒業論文発表会

1 月 30 日, 2008, 福井大学工学部物理工学科

一般方向のスピン成分に関する King 問題

物理工学科　杉本宏行

はじめに

- **qubit について**

量子情報の最小単位。qubit は$|\uparrow\rangle$と$|\downarrow\rangle$だけではなく$|\uparrow\rangle$と$|\downarrow\rangle$の重ね合わせた状態もとることができる。

重ね合わせの状態の例 ：$|\phi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$

- **エンタングルした状態について**

1 つめの qubit の測定の結果が 2 つめの qubit の測定の結果に影響する。
２つの測定結果が絡み合っている状態のこと。

エンタングルした状態の例 ：$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$

King問題について

King問題を考える目的

複数の非可換な物理量のどれか１つを測定した場合、その結果を
他の測定の結果から推定することができるのか

$\Longrightarrow$ 非可換な物理量の例として直交したスピン σ_x , σ_y σ_z を考えてみる。

具体的に

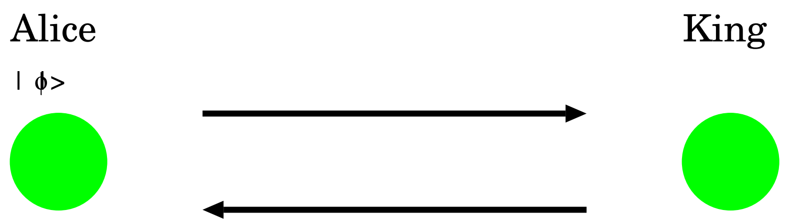
1. Aliceはqubit$|\phi\rangle$を用意し、Kingに渡す。

2. Kingは渡されたqubitに対して、$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$のどれか１つの測定をし、Aliceに返す。

3. Aliceは返ってきたqubitに対して、ある測定をする。

4. KingはAliceに自分が測定したスピンの方向を教える。
   (Kingがσ_xを測定したとするとx方向)

5. Aliceはqubitの状態とどの方向の測定をしたかという情報から
   Kingの測定結果が１か-１かを推定する。



Vaidmanらの方法 (１９８７)

- **Aliceが用意するqubit：** $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{\rm ext}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle_{\rm ext}|\downarrow\rangle)$

- **Kingの測定：** σ_x or σ_y or σ_z

- **返ってきたqubitと持っていたもう１つのqubitとの２ qubitに対するAliceの測定：ある４つの正規直交基底を固有状態に持つ演算子A**

$\Longrightarrow$ **AliceはKingの測定結果を１か-１か100％推定できる。**

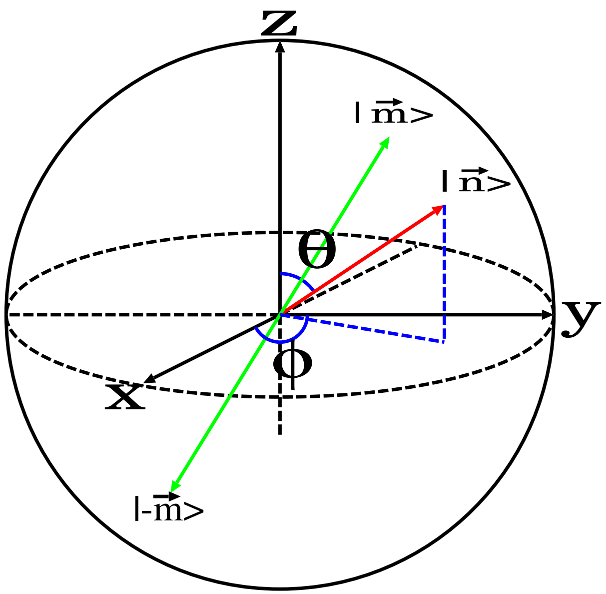
Vaidmanらはエンタングルした状態を使えば、直交したσ_x , σ_y , σ_zのどれか１つを測定した場合の測定結果を他の測定から１００％正しく推定することができることを示した。

エンタングルした状態を使わない場合では

- **Aliceの用意するqubit：**$|\vec{n}\,\rangle$

- **Kingの測定：**σ_x or σ_y or σ_z

- **返ってきたqubitに対するAliceの測定：**$\{\,|\vec{m}\,\rangle\ ,\ |-\vec{m}\,\rangle\,\}$



$$|\vec{n}\,\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

測定結果の確率を表にまとめると

		σ_x	
		1	**-1**
Aliceの測定結果	**1**	$\frac{1}{4}(1+n_x)(1+m_x)$	$\frac{1}{4}(1-n_x)(1-m_x)$
	-1	$\frac{1}{4}(1+n_x)(1-m_x)$	$\frac{1}{4}(1-n_x)(1+m_x)$

σ_y , σ_z についても同様に書ける。

AliceがKingの測定結果を１か-１か正しく推定する確率Pは

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}(|n_x + m_x| + |n_x - m_x| + |n_y + m_y| + |n_y - m_y| + |n_z + m_z| + |n_z - m_z|)$$

となることがわかった。ここで n_x, n_y, n_z は $\vec{n}$ の x, y, z 方向成分、m_x, m_y, m_z は $\vec{m}$ の x, y, z 方向成分である。

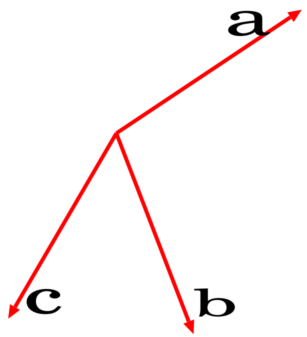
確率Pが最大となる$\vec{n}$，$\vec{m}$を求め、最大確率$P_{\max}$を求める。

結果

- $|n_x + m_x| + |n_x - m_x| + |n_y + m_y| + |n_y - m_y| + |n_z + m_z| + |n_z - m_z| \leq 2(\sqrt{2} + 1)$
- **例:**$\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$，$\vec{m} = (0, 0, 1)$
- $P_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{6} \fallingdotseq 0.90$

エンタングルした状態を使わない場合、正しく推定する確率：約９０%
エンタングルした状態を使う場合、正しく推定する確率：１００%
⟹Kingの測定がσ_x，σ_y，σ_zのどれか１つだった場合、
エンタングルした状態の有効性がわかった。

King の測定が直交していない一般の３方向のスピン σ_a, σ_b, σ_c のどれか１つでエンタングルした状態を使わなかった場合と使った場合では



エンタングルした状態を使わない場合

- **Alice が用意する qubit：** $|\vec{n}\rangle$
- **King の測定：** σ_a or σ_b or σ_c
- **返ってきた qubit に対する Alice の測定：** $\{|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle\}$

AliceがKingの測定結果を１か-１か正しく推定する確率$P_{1\mathrm{qub}}$は

$$P_{1\mathrm{qub}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}(|n_\mathrm{a} + m_\mathrm{a}| + |n_\mathrm{a} - m_\mathrm{a}| + |n_\mathrm{b} + m_\mathrm{b}| + |n_\mathrm{b} - m_\mathrm{b}| + |n_\mathrm{c} + m_\mathrm{c}| + |n_\mathrm{c} - m_\mathrm{c}|)$$

となることがわかった。ここで$n_\mathrm{a}, n_\mathrm{b}, n_\mathrm{c}$は$\overrightarrow{n}$の$a, b, c$方向成分、$m_\mathrm{a}, m_\mathrm{b}, m_\mathrm{c}$は$\overrightarrow{m}$の$a, b, c$方向成分である。

確率$P_{1\mathrm{qub}}$が最大となる$\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{m}$を求め、最大確率$P_{1\mathrm{qub\ max}}$を求める。

結果

- $D_\mathrm{max} = \max\{\,|\overrightarrow{\mathrm{a}} \pm \overrightarrow{\mathrm{b}}|\,,\ |\overrightarrow{\mathrm{b}} \pm \overrightarrow{\mathrm{c}}|\,,\ |\overrightarrow{\mathrm{a}} \pm \overrightarrow{\mathrm{c}}|\,\}$

- $P_{1\mathrm{qub\ max}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(D_\mathrm{max} + 1)$

- **例：**$D_\mathrm{max} = |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$**ならば**$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|}$, $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{c}$

エンタングルした状態を使う場合

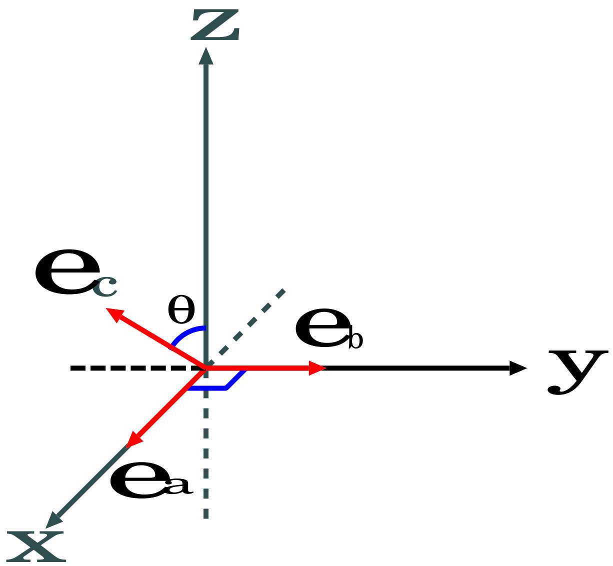
- **Aliceが用意するqubit：** $|\Psi\rangle$
- **Kingの測定：** σ_a or σ_b or σ_c
- **返ってきたqubitと持っていたもう１つのqubitとの２ qubitに対するAliceの測定：演算子A**

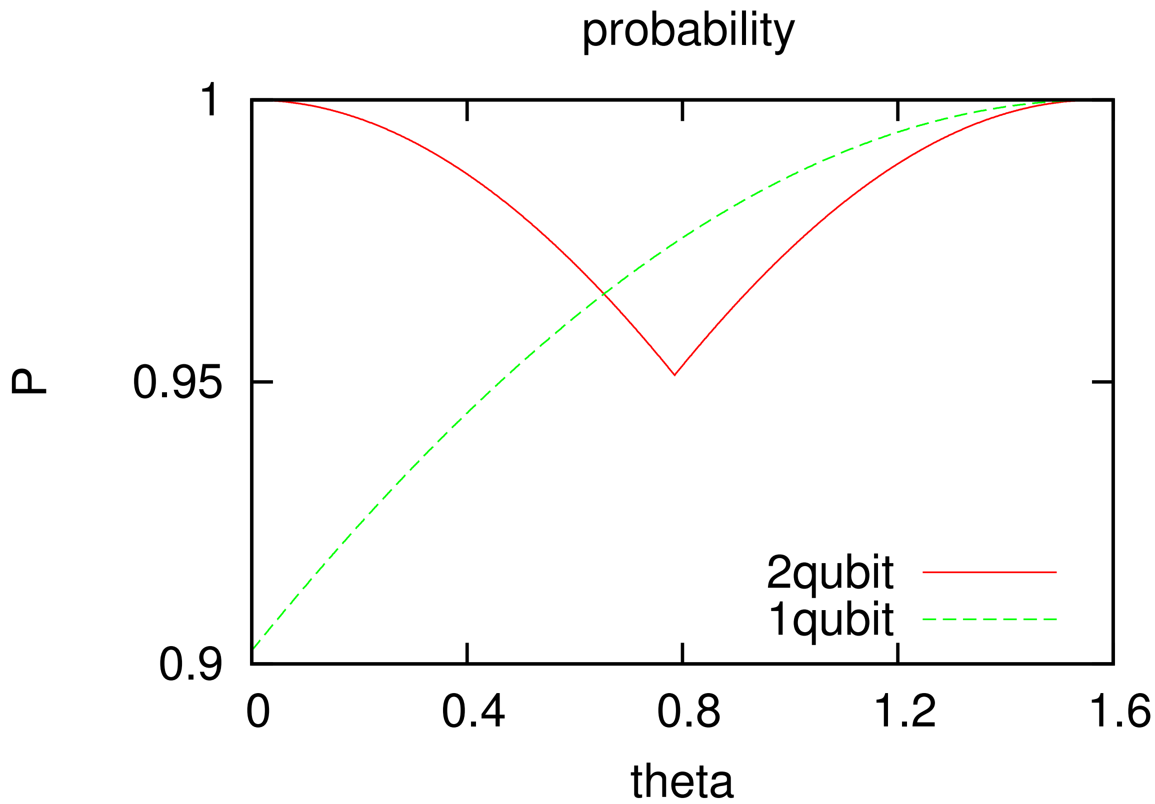
AliceがKingの測定結果を１か-１か正しく推定する確率 P_{2qub} **は**

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{2qub}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}(&|-a_x + a_y + a_z| + |a_x - a_y + a_z| + |a_x + a_y - a_z| + |a_x + a_y + a_z| \\
&+|-b_x + b_y + b_z| + |b_x - b_y + b_z| + |b_x + b_y - b_z| + |b_x + b_y + b_z| \\
&+|-c_x + c_y + c_z| + |c_x - c_y + c_z| + |c_x + c_y - c_z| + |c_x + c_y + c_z|)
\end{aligned}
$$

となることがわかった。ここで a_x, a_y, a_z **は** $\vec{a}$ **の** x, y, z **方向成分、** b_x, b_y, b_z **は** $\vec{b}$ **の** x, y, z **方向成分、** c_x, c_y, c_z **は** $\vec{c}$ **の** x, y, z **方向成分である。**

Kingが測定するスピンの方向





まとめ

- Kingの測定が直交した３方向のスピンのどれか１つでAliceがエンタングルした状態を使わない場合の正しく推定する確率が求められた。

  ⟹Kingの測定が直交した３方向のスピンのどれか１つだった場合、
  エンタングルした状態の有効性がわかる。

- Kingの測定が直交していない一般の３方向のスピンのどれか１つでAliceがエンタングルした状態を使う場合と使わない場合の正しく推定する確率が求められた。

  ⟹ エンタングルした状態を使わない場合の確率が
  使った場合の確率を上回ることがある。

Kingの測定が直交していない一般の３方向でエンタングルした状態を使う場合、Aliceが用意するqubitやAliceの測定をより最適化する必要がある。

演算子Aの基底

$$
\begin{cases}
|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\downarrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\uparrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}}) \\
|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\uparrow\rangle - \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\downarrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\uparrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}}) \\
|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\downarrow\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}) \\
|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\downarrow\rangle - \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} + |\downarrow\rangle_{\mathrm{ext}}|\uparrow\rangle e^{i\frac{\pi}{4}})
\end{cases}
$$