

Error marginのある量子状態の識別問題

福井大学大学院工学研究科物理工学専攻 杉本 宏行

2010年2月

量子情報理論において様々な状況での量子状態を識別することは最も基本的で重要であるが、極めて非自明な問題である。それは、量子測定が実際は統計的で、測定された系は一般に壊れてしまうからである。

量子状態識別はそのような問題の一つである。まず、未知の量子状態 ρ が与えられる。それは、ある発生確率に従う既知の量子状態の集合 $\{\rho_a\}$ から選ばれていることはわかっているものとする。与えられた状態 ρ に対して”ある測定”を行い、その測定結果から $\{\rho_a\}$ のどれに等しいかを推定するというのが量子状態の識別問題である。ここで、問題となるのは識別が成功する確率が最大となるような測定はどのようなものなのかということである。

このような量子状態の識別問題を考える際、一般に二つの設定が研究されている。一つは、識別が間違える確率に対して何の制限もしないで識別成功確率を最大にする。これは結果的に識別が間違える確率を最小にするので minimum-error discrimination と呼ばれる。もう一つは、unambiguous discrimination と呼ばれ、識別が間違えることは許されない。その代わりに識別が成功する可能性がない場合に”わからない”という推定を許容する。

本研究では、識別が間違える確率に対して error margin m を越えてはならないという条件の下で識別成功確率を最大化する問題を考察する。unambiguous discrimination は $m = 0$ の場合に対応しており、一方、minimum-error discrimination は $m = 1$ の場合に対応しているのは明らかである。error margin を操作することで、この問題は minimum-error discrimination と unambiguous discrimination を連続的に補間することになる。Touzel, Adamson, Steinburg は、この問題で射影測定と POVM 測定の数値的結果を比較した。また、以前の研究で、等しい発生確率を持つ二つの純粋状態の error margin のある識別を分析し、閉じた解析的な形式で最適な識別成功確率を得ている。この論文では、二つの純粋状態の発生確率が一般の場合へ拡張する。新しい特徴として、発生確率と error margin からなる二次元パラメータ空間が三つに分割されることである。最適な測定は、この三つの領域によって異なる。error margin が大きいので識別が間違える確率に対する制限が作用しないとすると、最適な測定は minimum-error discrimination のそれとなる。このような場合の領域を minimum-error 領域と呼ぶことにする。unambiguous discrimination では、もし状態の一つの発生確率が十分に小さければ、最適な測定はこの状態を推定する結果を除外した二つの結果だけを生み出す。これは、パラメータ空間の領域で一般の error margin に対しても起こる。このような領域を single-state 領域と呼ぶ。もう一つの領域、intermediate 領域では、三つの測定結果の確率がゼロでない領域である。

この論文の目的は、三つの領域とそれぞれの領域の最適な識別成功確率を完全に解析的な形式で決定することである。問題は SDP(semidefinite programming) の一つとして定式化される。量子状態の識別問題が SDP として定式化されることはよく知られている。また、識別が間違える確率に対する error margin には二つのタイプを考えることができる。一つは、識別が間違える平均確率に対する制限の場合で、weak error-margin condition と呼ぶ。もう一つは、条件付き間違い確率に対する制限で、strong error-margin condition と呼ぶ。この二つの制限のタイプの識別成功確率には”ある関係”がある。その関係について証明を行う。