

# 卵は回すとなぜ立つか II

大森 英胤

# 目次

Moffatt, 下村の理論 (Nature, **416**, 386(2002)) の概略

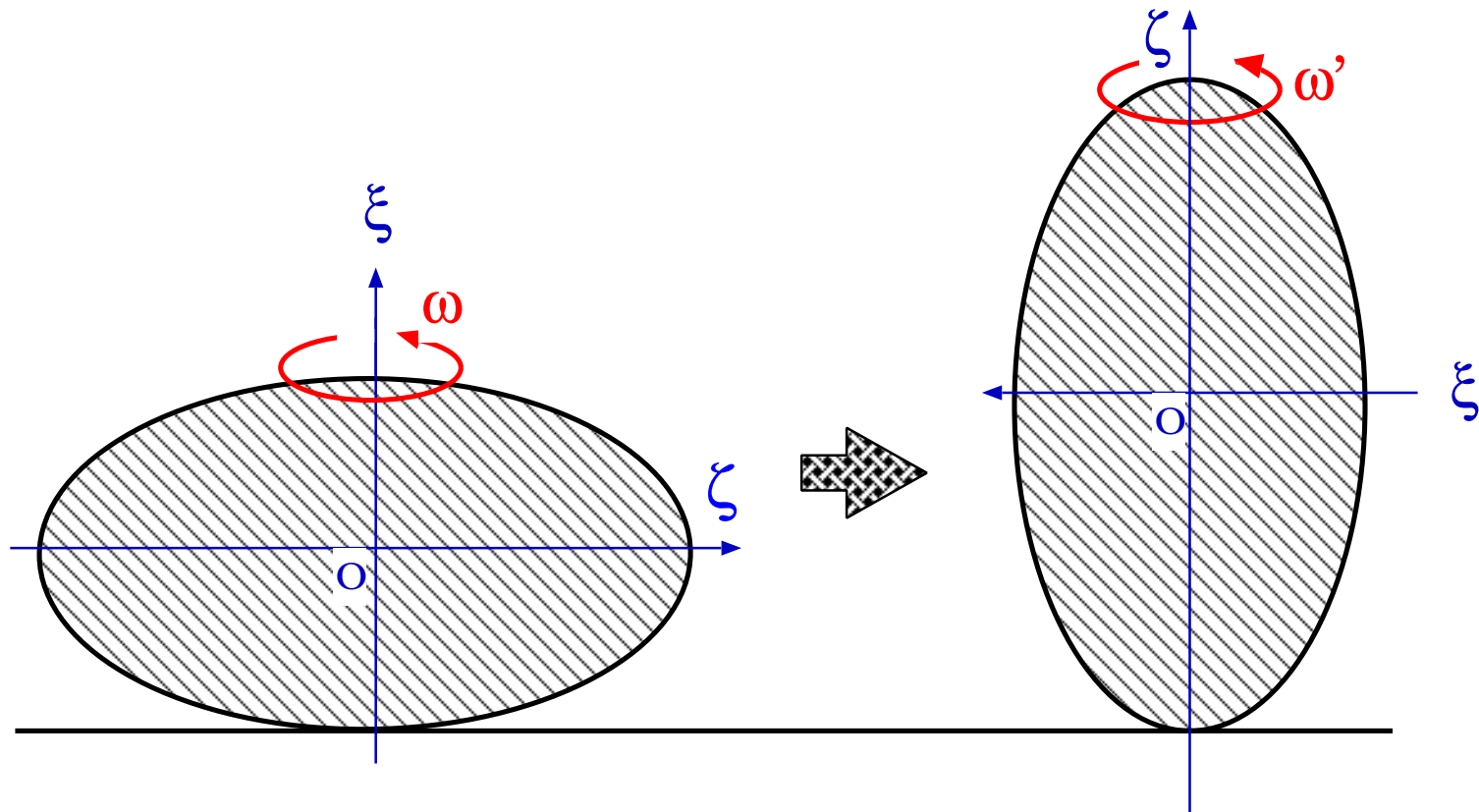
- ・ 回転直立現象とは
- ・ 剛体回転のオイラー方程式
- ・ ジェレット定数
- ・ ジャイロスコピック近似を仮定した場合の運動方程式

数値シミュレーション

- ・ プログラムの改良と検証
- ・ ジェレット定数の近似的保存
- ・ ジャイロスコピック近似の妥当性
- ・ まとめ

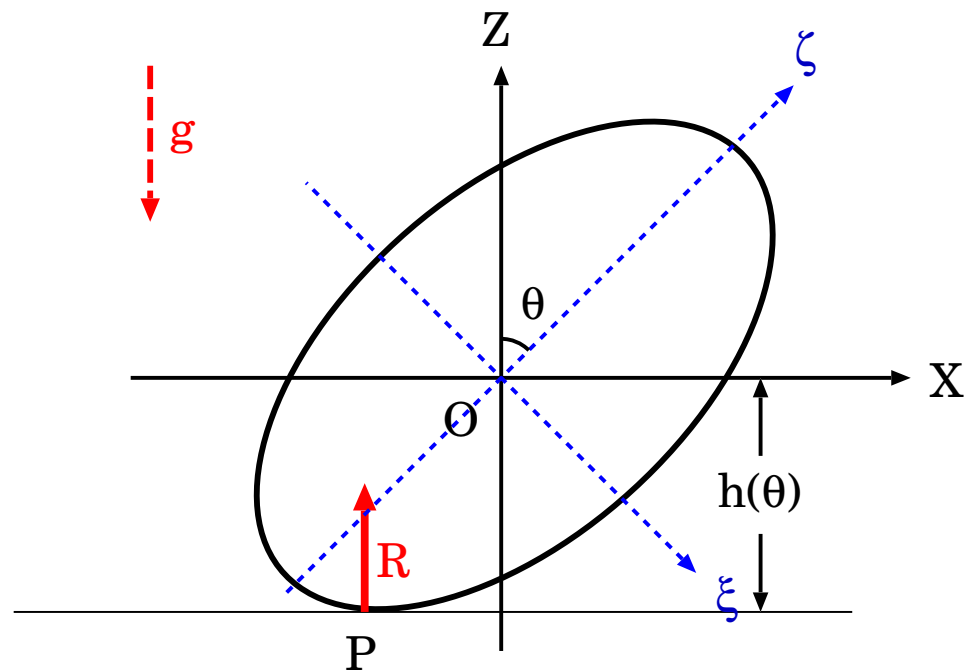
## 回転直立現象とは

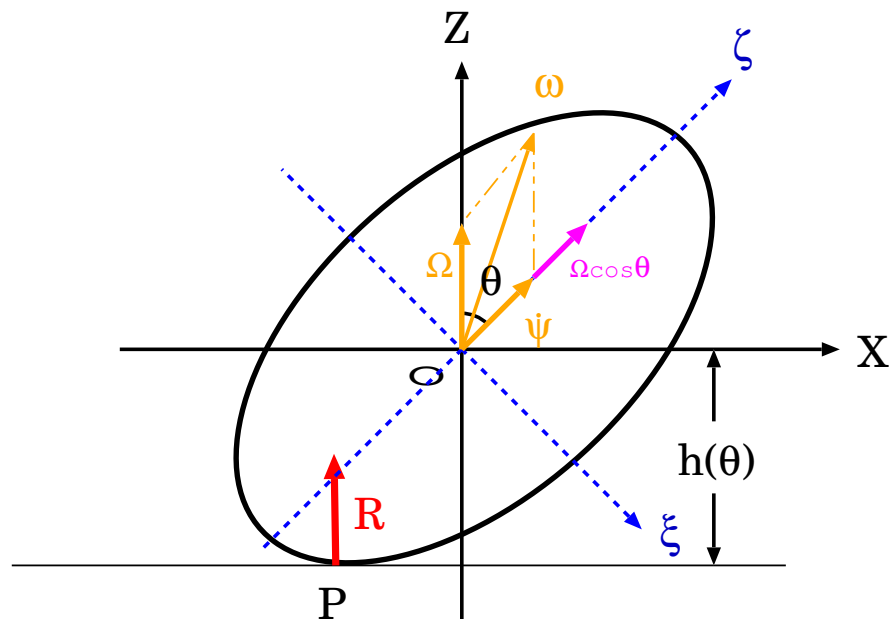
両端を持って速く回すと立ち上がる。



## 回転剛体のオイラー方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} &= \mathbf{N} \\ &= \overrightarrow{OP} \times (\mathbf{R} + \mathbf{F})\end{aligned}$$





ζ 軸を含む鉛直面の回転角速度を  $\Omega$

ζ 軸方向の角速度を  $\dot{\psi}$  とする。

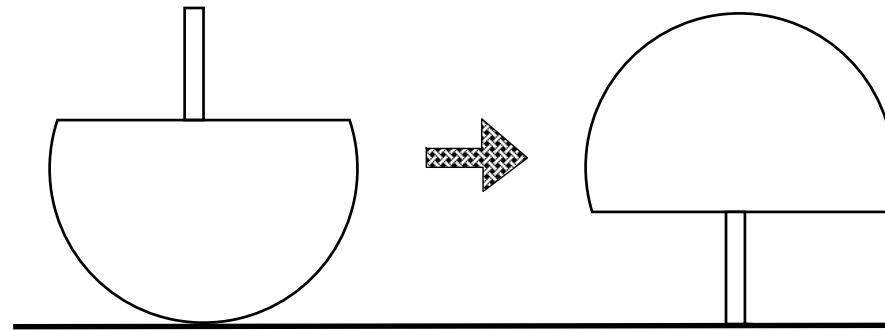
ξ 軸, η 軸まわりの慣性モーメントを  $A$  とし

ζ 軸まわりの慣性モーメントを  $C$  とすると角運動量  $L$  は

$$L = ((Cn - A\Omega \cos \theta) \sin \theta, A\dot{\theta}, A\Omega \sin^2 \theta + Cn \cos \theta)$$

# ジェレット定数

-逆立ちごま-



逆立ちごまが逆立ちするためには

- ・ こまと接触面との摩擦が必要である。
- ・ 接触面がすべっていて力学的エネルギーが減少する。

逆立ちごまには厳密な運動定数 (ジェレット定数) が存在する。

$$J = -L \cdot \overrightarrow{OP}$$

軸対称物体の  $L$  を用いて軸対称物体のジェレット定数の時間微分を求めると

$$\dot{J} = (C_n - A\Omega \cos \theta) X_P^2 \frac{d \sin \theta}{dt X_P}$$

となる。ここで  $X_P$  は  $\overrightarrow{OP}$  の  $x$  成分である。

物体が球だとすると、 $\sin \theta / X_P$  が定数になるので

$$\dot{J} = 0$$

一般の軸対称物体では、厳密には

$$\dot{J} \neq 0$$

となる。

# ジャイロスコピック近似

オイラー方程式のy成分は

$$A\ddot{\theta} - A\Omega^2 \cos \theta + Cn\Omega \sin \theta = -RX_P$$

であるが、ここでは回転が速い場合なので $\Omega^2$ が大きいとする。すると左辺第2項と第3項は右辺を大きく上まわる。

また、軸対称物体が立ち上がる時間は摩擦による長いものなので

$$|\ddot{\theta}| \ll \Omega^2$$

が成り立つ。これらから

$$(Cn - A\Omega \cos \theta)\Omega \sin \theta = 0$$

となり、 $\sin \theta \neq 0$ では

$$Cn = A\Omega \cos \theta$$

が成り立つ。この式をジャイロスコピック近似と言う。このジャイロスコピック近似を仮定すると軸対称物体のジェレット定数の時間微分は

$$\dot{J} = 0$$

となり $J$ は運動定数となる。



## ジャイロスコピック近似を仮定した場合の運動方程式

軸対称物体の角運動量  $L$  はジャイロスコピック近似によって

$$L = (0, A\dot{\theta}, A\Omega)$$

となる。これを用いるとジェレット定数は

$$J = A\Omega h$$

となり、オイラー方程式の  $\times$  成分は

$$A\Omega\dot{\theta} = Fh(\theta)$$

となる。これらを用いてジャイロスコピック近似方程式は

$$J\dot{\theta} = -Fh^2(\theta)$$

と簡単な 1 階の微分方程式になる。

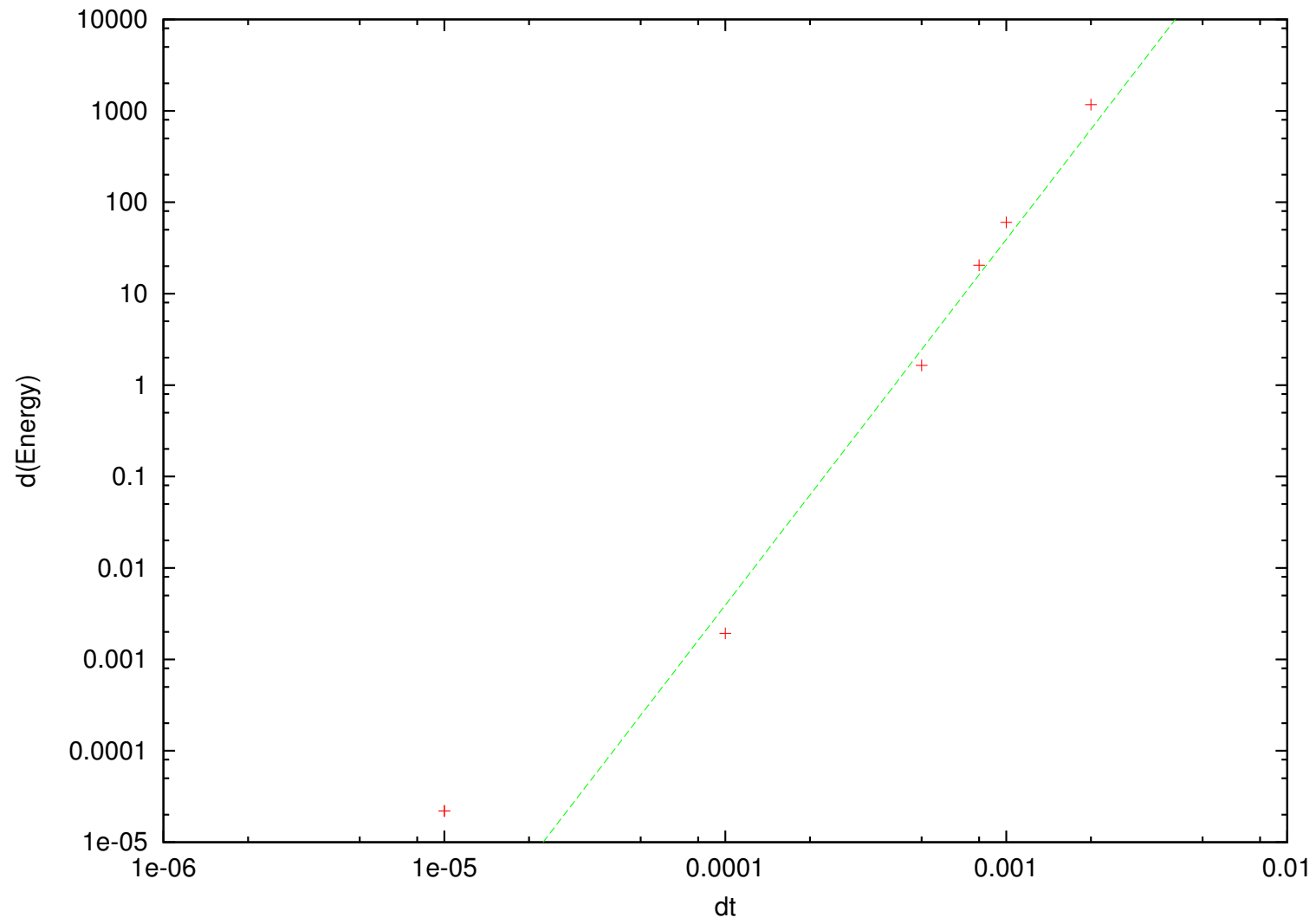
## 数値シミュレーション

4 次のルンゲクッタ法を用いてオイラーの微分方程式を解いた。

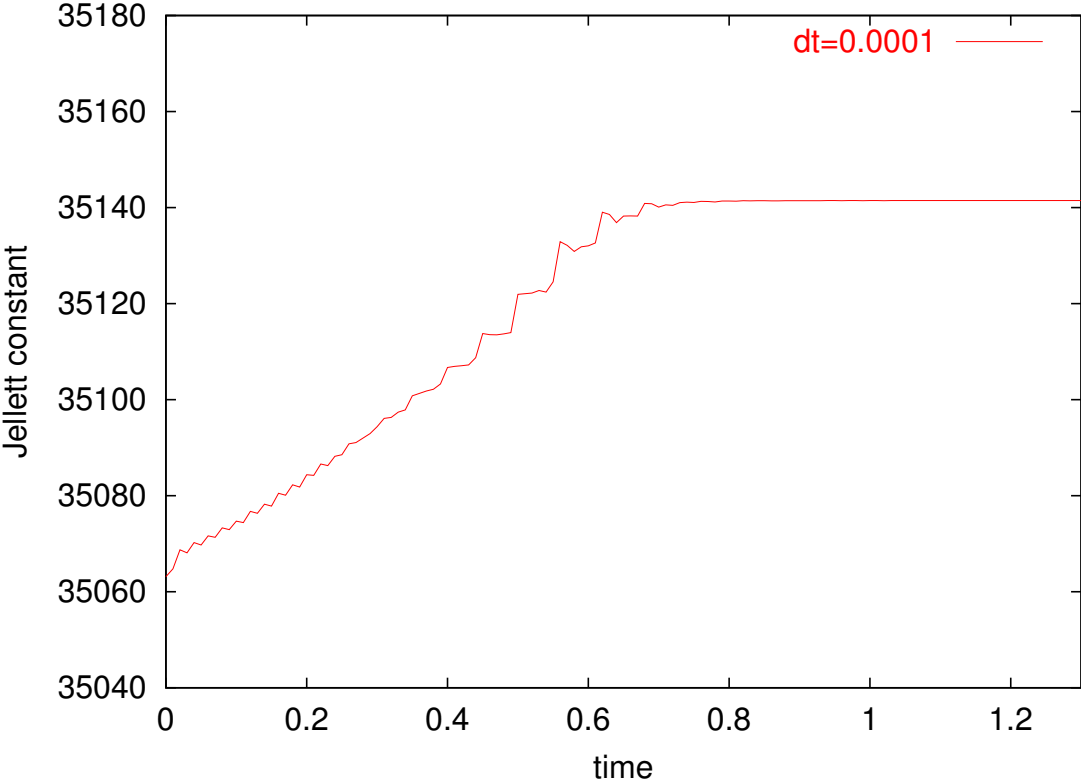
まず、プログラムについて検証した。

方法は横軸に  $dt$  をとって縦軸に  $t = 0.2$  のときのエネルギーの誤差をとり対数プロットの傾きが 4 になっていて、4 次のルンゲクッタ法に従っているかどうかを確かめた。

次にジャイロスコピック近似を仮定したときと同様に  $\dot{j} = 0$  となっているかを調べた。

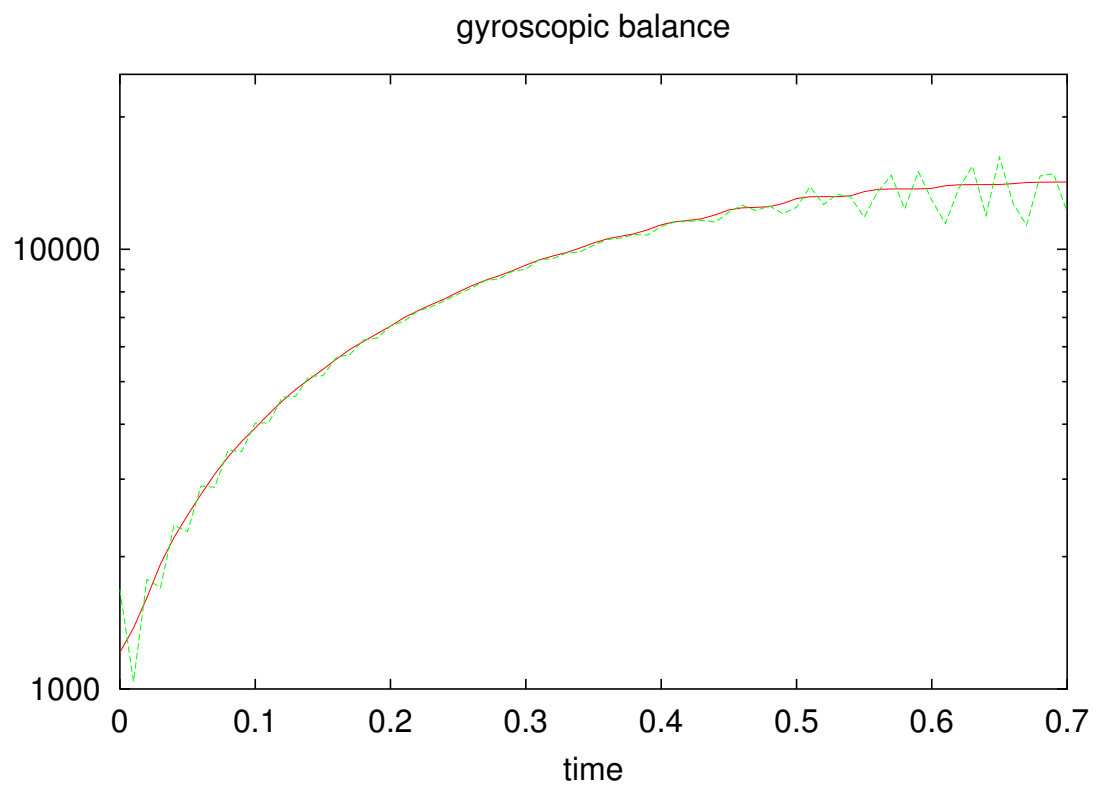


# 次にジェレット定数の変化について



ジャイロスコピック近似が成立しているかどうか

ジャイロスコピック近似  $C_n = A\Omega \cos \theta$



## まとめ

1, Moffatt、下村の理論を紹介した。

卵などの剛体を高速で回転させると立ち上がるのは、ジェレット定数  $J = A\Omega h$  が保存されるため 摩擦によって角速度  $\Omega$  が減少すると  $h$  が増加するためである。

2, 数値計算によるシミュレーションでは

軸対称剛体が立ち上がる仮定でジャイロスコピック近似は  $\pm 4\%$  程度破れている。しかし、時間平均をとると精度よく成り立つためジェレット定数の変化は約  $0.3\%$  程度しか変化しないことが分かった。