卒業論文発表会

1 月 28 日, 2009, 福井大学工学部物理工学科

量子エンタングルメントの指標とその突然の消滅

物理工学科　５７山下悟士
４４丹尾大輔

量子エンタングルメント

古典bit (0 , 1)

例　コインの裏と表

量子bit (qubit)　　２つの状態($|0\rangle$, $|1\rangle$)しか持たない系

例　電子のスピン (右回り $|0\rangle$、 左回り $|1\rangle$)

２準位原子 (基底状態 $|0\rangle$、 励起状態 $|1\rangle$)

重ね合わせの原理

$\rightarrow |\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

- qubitが２つの場合での量子系

$|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$

重ね合わせの原理

$$|\phi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

$$\left(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1 \right)$$

ある2qubitの状態

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_a|1\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_a|0\rangle_b$$

$$\begin{pmatrix} \text{確率}: \frac{1}{2} & \cdots & |0\rangle_a \to |1\rangle_b \\ \text{確率}: \frac{1}{2} & \cdots & |1\rangle_a \to |0\rangle_b \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

測定結果が絡み合っている(エンタングルメント)

このようにエンタングルした状態を、最大エンタングルメント状態又は
EPR pair(Einstein・Podolsky・Rosen対)という。

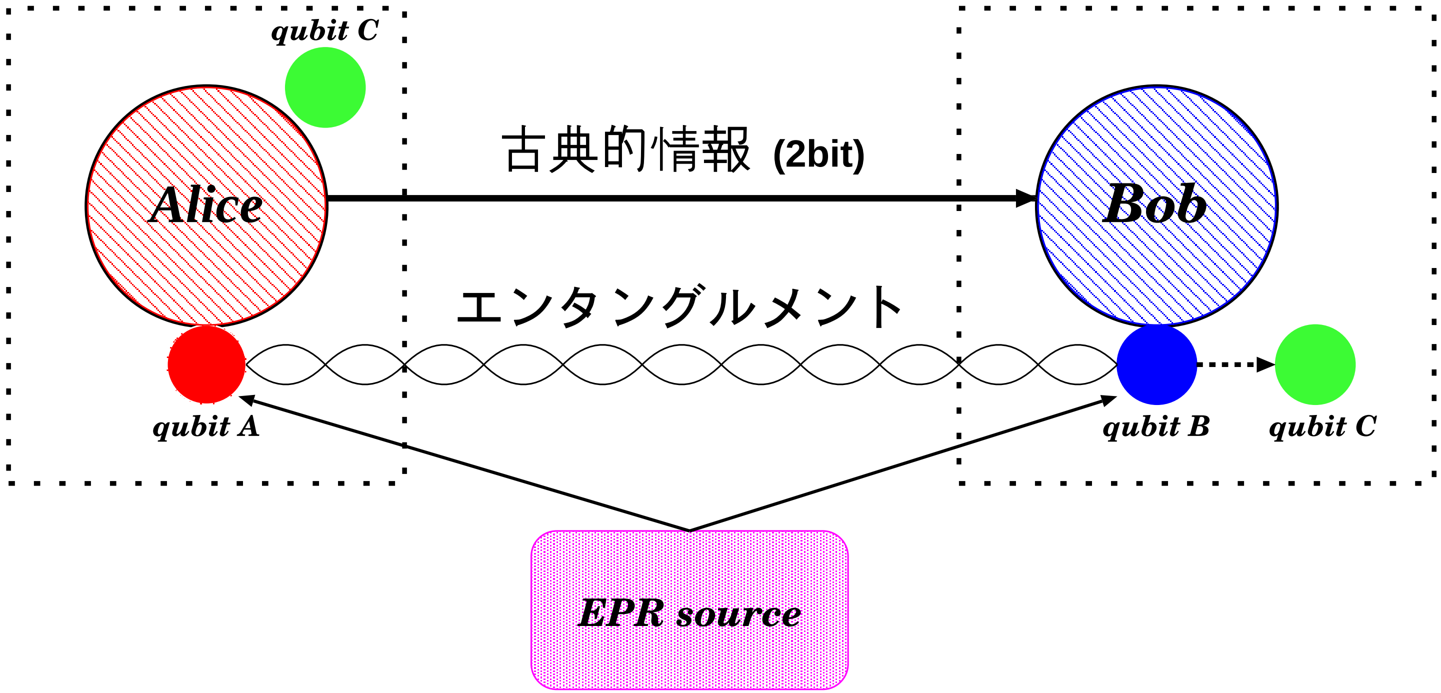
研究の目的

- エンタングルメントの有用性の例
  量子テレポーテーション
- 量子テレポーテーションの忠実度とエンタングルメントの指標(Concurrence)
  量子テレポーテーションの忠実度 F(Fidelity)
  Concurrenceの導入
- 2準位原子系におけるConcurrenceの時間変化
  エンタングルメントの突然死(Entanglement Sudden Death)
- 2準位原子系における有限温度でのConcurrenceの時間変化
  有限温度でのエンタングルメントの突然死

量子テレポーテーション

目的：Aliceに与えられた任意の状態のqubitを、遠く離れた位置にいるBobにテレポートしたい。

1. 最大エンタングルメント状態 $|\Phi\rangle_{ab}$ の2qubit (qubit a , qubit b)を作り、Aliceが qubit a、Bobが qubit bを持ち遠く離れる。
2. Aliceに、Bobへ送りたい状態$|\phi\rangle_c$ のqubit cを与える。
3. Aliceはqubit aとqubit cに対して、ある測定を行い測定結果(2bit)をBobに伝える。
4. BobはAliceからの情報に応じて、qubit bに対して特定の変換を行い$|\phi\rangle_c$を得る.



最大エンタングルメントでないとき忠実度の期待値 F (Fidelity)

- Alice , Bobが準備したエンタングルメント状態の2qubit
  $$|\Phi\rangle_{ab} = \sqrt{\alpha}|0\rangle_a|1\rangle_b + \sqrt{\beta}|1\rangle_a|0\rangle_b \quad (\alpha + \beta = 1)$$
- AliceがBobに送りたい状態
  $$|\phi\rangle_c = c_0|0\rangle_c + c_1|1\rangle_c$$
- Aliceからの古典情報によってBobが作り出した状態 $|\phi_i'\rangle$

忠実度の期待値は

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^{4} P_i|\langle\phi_i'|\phi\rangle_c|^2 \quad (P_i\text{：状態}|\phi_i'\rangle\text{を得る確率}) \\ &= |c_0|^4 + |c_1|^4 + 4|c_0|^2|c_1|^2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= 1 - 2|c_0|^2|c_1|^2(1 - C) \quad \left(C = 2\sqrt{\alpha\beta}\right) \end{aligned}$$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ のとき (EPR pair)

$C = 1 \Longrightarrow F = 1$

$\alpha \neq \beta$ のとき

$C < 1 \Longrightarrow F < 1$

Concurrenceの導入

Concurrenceとは …

エンタングルメントの指標を表す。

Concurrenceの定義

2qubitの一般の状態$|\Phi\rangle$のConcurrence $C(\Phi)$は次の表し方がある。

- **任意の$|\Phi\rangle$に対して、Schmidtの分解を行う。**

$$|\Phi\rangle = \sqrt{\alpha}|0'\rangle_a|0'\rangle_b + \sqrt{\beta}|1'\rangle_a|1'\rangle_b \quad \left(\{|0'\rangle_a, |1'\rangle_a\}, \{|0'\rangle_b, |1'\rangle_b\} \text{は正規直交基底}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{C(\Phi) = 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

- $\theta = \sigma_y \otimes \sigma_y K$**とすると、** $\left(\begin{array}{l} \sigma_y\text{：}y\text{方向のパウリ行列} \\ K\text{：複素共役をとる演算子} \end{array}\right)$

$$\rightarrow \boxed{C(\Phi) = |\langle \Phi|\theta|\Phi\rangle|}$$

純粋状態と混合状態、密度演算子の導入

今までのように状態$|\Phi\rangle$にあるとき、量子系は**純粋状態**という。

$$|\Phi\rangle = \sqrt{\alpha}|00\rangle + \sqrt{\beta}|11\rangle$$：純粋状態

確率q_1で純粋状態$|\phi_1\rangle$に、確率q_2で純粋状態$|\phi_2\rangle$にあるとき、量子系は**混合状態**という。
ある2qubitで上記の混合状態での量子系における密度演算子ρは、

$$\rho = q_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + q_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

一般に、確率q_iで状態$|\phi_i\rangle$にあるような混合状態の密度演算子は

$$\rho = \sum_i q_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

純粋状態($q_i = 1$、状態は$|\phi\rangle$)のとき

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$$

混合状態のConcurrence

それぞれの状態のConcurrenceの平均を混合状態のConcurrenceと仮定する。

確率 $q_1 = \frac{1}{2}$ で $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

確率 $q_2 = \frac{1}{2}$ で $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

$$\rho = \frac{1}{2}|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| + \frac{1}{2}|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2| \quad (1)$$
$$= \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11| \quad (2)$$

(1)の密度演算子のとき

$C(\Phi_1) = 1$ 、 $C(\Phi_2) = 1$

$$C(\rho) = q_1 C(\Phi_1) + q_2 C(\Phi_2)$$
$$= 1$$

(2)の密度演算子のとき

$C(00) = 0$ 、 $C(11) = 0$

$$C(\rho) = q_1 C(00) + q_2 C(11)$$
$$= 0$$

それぞれの結果からConcurrenceの値に矛盾が生じる。

2個のqubitがある混合状態にあるとき、エンタングルメントの指標であるConcurrenceはどう定義するべきか？

密度演算子ρで記述される混合状態のConcurrenceを次のように定義する。

$$C(\rho) = \min \sum_i q_i C(\phi_i) \quad \left(\rho = \sum_i q_i | \phi_i \rangle\langle \phi_i | \right)$$

(minは$\rho = \sum q_i | \phi_i \rangle\langle \phi_i |$となるすべての$q_i$と$| \phi \rangle_i$に関するものである)

このminを計算するのは容易ではないが、次の公式が成立することが分かっている。
以降、次の公式を混合状態のConcurrenceの定義として用いる。

$$C(\rho) = \max\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right)$$

$$\zeta = \rho\theta\rho\theta = \rho\left(\sigma_y \otimes \sigma_y\right)\rho^*\left(\sigma_y \otimes \sigma_y\right)$$

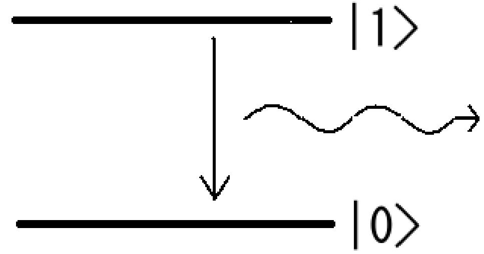
ただし、λ_iは演算子ζの固有値を大きい方から並べたものである。($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$)

2準位原子の自然放射 (温度 T = 0)

一つの2準位原子を考える。
時刻 $t = 0$ で励起状態にある原子は時刻 t にはある確率で自然放射し、基底状態になる。
他方、基底状態にある原子はそのまま基底状態に留まるとする。
密度演算子で書けば、

$$\rho(0) = |1\rangle\langle 1|$$
$$\downarrow$$
$$\rho(t) = (1 - e^{-\Gamma t})|0\rangle\langle 0| + e^{-\Gamma t}|1\rangle\langle 1|$$

$$\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$$
$$\downarrow$$
$$\rho(t) = |0\rangle\langle 0|$$



ここで、 $\frac{1}{\Gamma}$ は励起状態の寿命である。

一般に２準位原子の自然放射は次式で表される。

$$\rho(t) = K_1(t)\rho(0)K_1^\dagger(t) + K_2(t)\rho(0)K_2^\dagger(t) = \sum_{a=1,2} K_a(t)\rho(0)K_a^\dagger(t)$$

$$K_1(t) = |0\rangle\langle 0| + e^{\frac{-\Gamma t}{2}}|1\rangle\langle 1|$$

$$K_1^\dagger(t) = |0\rangle\langle 0| + e^{\frac{-\Gamma t}{2}}|1\rangle\langle 1|$$

$$K_2(t) = \sqrt{1 - e^{-\Gamma t}}|0\rangle\langle 1|$$

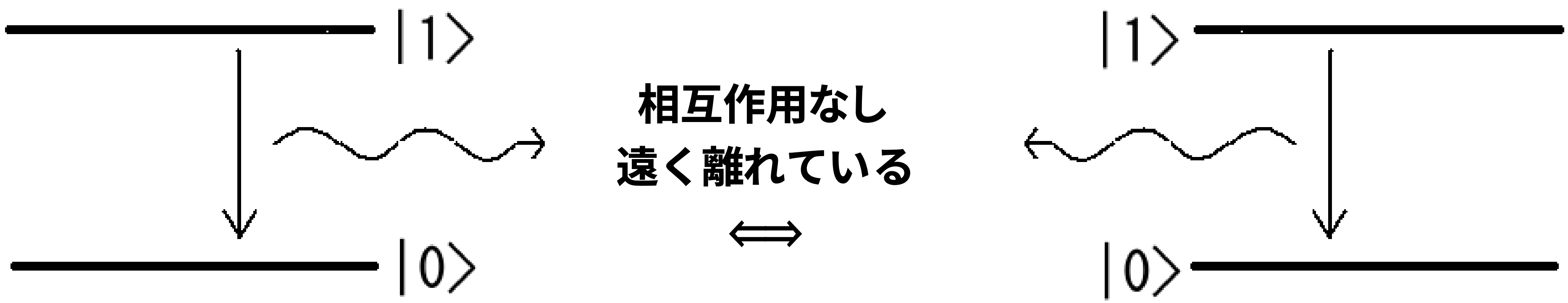
$$K_2^\dagger(t) = \sqrt{1 - e^{-\Gamma t}}|1\rangle\langle 0|$$

$K_1(t), K_2(t)$ はクラウス演算子と呼ばれる。

エンタングルメントの時間的変化

二つの２準位原子を考える。これらの間には相互作用はなく、独立に自然放射を行うとする。この時$\rho(t)$は次式で表される。

$$\rho(t) = \sum_{a,b=1}^{2} K_a(t) \otimes K_b(t)\rho(0)K_a^\dagger(t) \otimes K_b^\dagger(t)$$



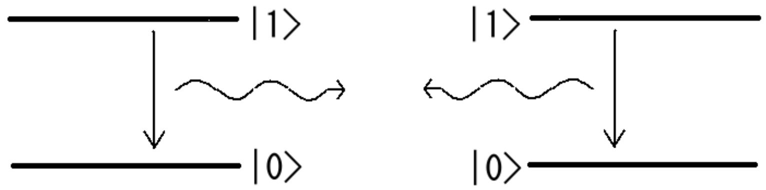
エンタングルメントの消滅および突然死

時刻 t = 0で純粋状態、あるいは混合状態おける2つのqubitの時刻 t でのconcurrenceを調べる。

純粋状態

$$\rho(0) = |\,00\,\rangle\langle\,00\,| \quad \Longrightarrow \quad C(\rho) = 0$$

$$\rho(0) = |\,11\,\rangle\langle\,11\,| \quad \Longrightarrow \quad C(\rho) = 0$$



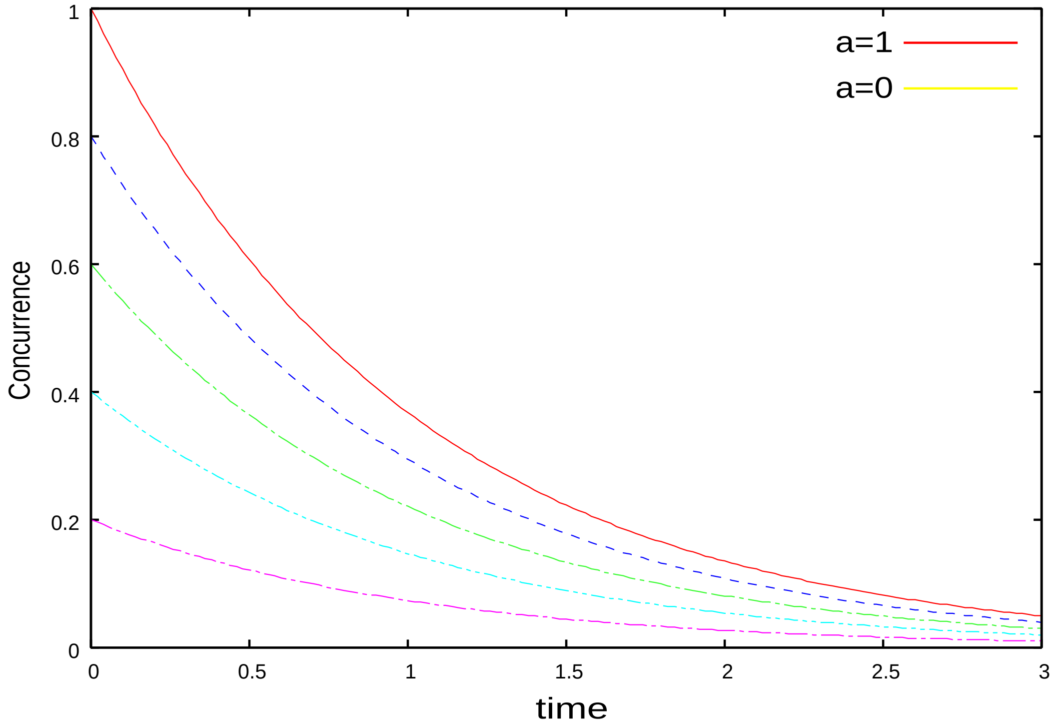
$$\rho(0) = |\,\psi\,\rangle\langle\,\psi\,| \quad \Longrightarrow \quad C(\rho) = e^{-\Gamma t} \qquad \left(|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\,\rangle + |\,10\,\rangle) \right)$$

$$\rho(0) = |\,\psi'\,\rangle\langle\,\psi'\,| \quad \Longrightarrow \quad C(\rho) = e^{-2\Gamma t} \qquad \left(|\,\psi'\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle) \right)$$

混合状態

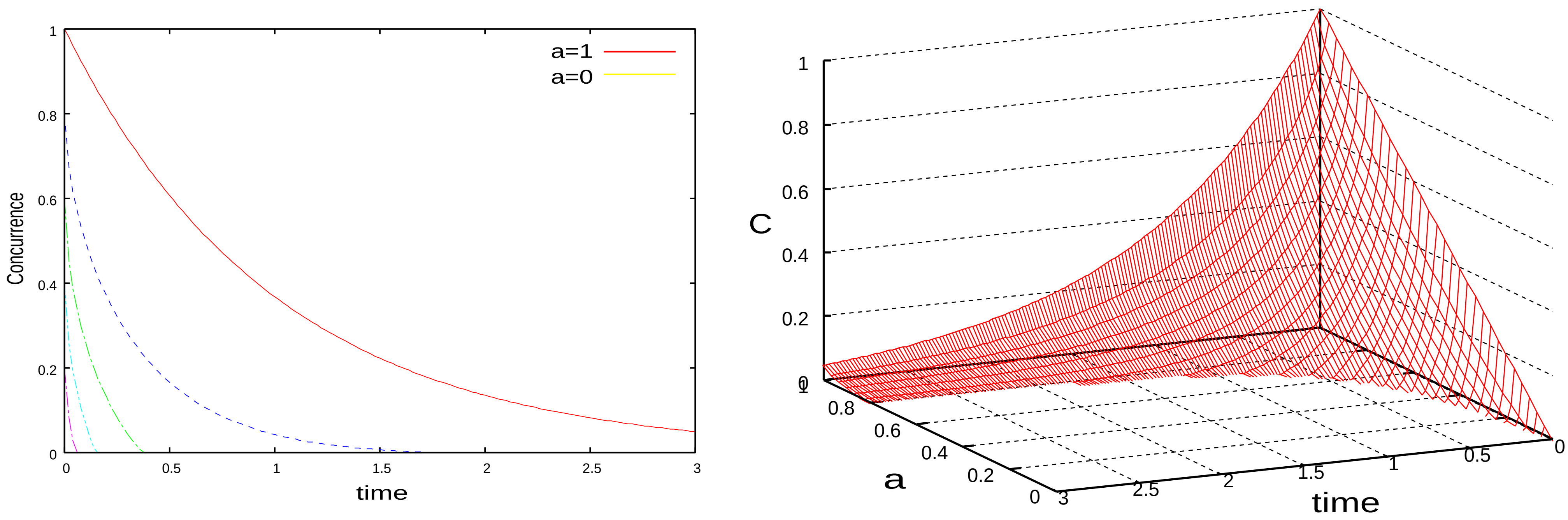
$$\rho(0) = (1-a)|\,00\,\rangle\langle\,00\,| + a|\,\psi\,\rangle\langle\,\psi\,| \qquad \left(|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\,\rangle + |\,10\,\rangle)\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad C(\rho) = \max\left\{ae^{-\Gamma t}\,,\ 0\right\} \qquad (0 \le a \le 1)$$



$$\rho(0) = (1-a)|\,11\,\rangle\langle\,11\,| + a|\,\psi\,\rangle\langle\,\psi\,| \qquad \left(|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,01\,\rangle + |\,10\,\rangle)\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad C(\rho) = \max\left\{ ae^{-\Gamma t} - 2e^{-\Gamma t}\sqrt{(1-a)(1-e^{-\Gamma t})(ae^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma t} + 1)}\,,\ 0 \right\}$$



上記の混合状態の結果から、

2原子が励起した状態$|11\rangle$と、エンタングルした状態$|\psi\rangle$との混合状態ではConcurrenceの値は有限のtで0になることがある。
$\Longrightarrow$ 突然死！
2原子が基底状態にある状態$|00\rangle$と、エンタングルした状態$|\psi\rangle$との混合状態ではConcurrenceの値は指数関数的に0に収束する。

$$\left(|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)\right)$$

「エンタングルメントの突然死」はJ.H.EberlyとTing Yuによって発見された。
(2006年)
(次ページ参照)

- 上記の混合状態の組み合わせは私達が考えたものだが、同様に突然死が起きる場合も確認できた。

J.H.EberlyとTing Yuの計算

$$\rho(0) = \frac{1}{3}(a|00\rangle\langle 00|$$

$$+ \quad |01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|$$

$$+ \quad (1-a)|11\rangle\langle 11|)$$

$$C(\rho) = \max\left\{ \frac{2}{3}e^{-\Gamma t}\{1 - \sqrt{(1-a)\{(1-a)(1-e^{-\Gamma t})^2 + 2(1-e^{-\Gamma t}) + a\}}\},\ 0 \right\}$$

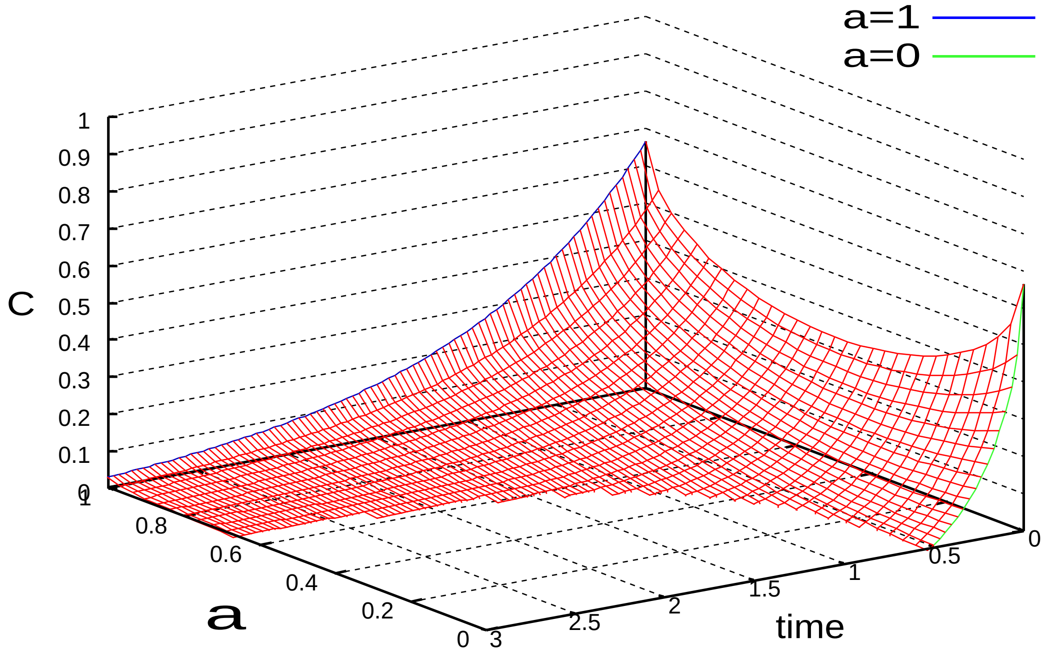
a=1

$$C(\rho) = \max\left\{ \frac{2}{3}e^{-\Gamma t}\ ,\ 0 \right\}$$

a=0

$$C(\rho) = \max\left\{ \frac{2}{3}e^{-\Gamma t}\{1 - \sqrt{(1 - e^{-\Gamma t})^2 + 2(1 - e^{-\Gamma t})}\ \}\ ,\ 0 \right\}$$

$$\Gamma t = \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ で突然死する。



有限温度でのエンタングルメント

有限温度では一般に２準位原子の光の放射と吸収は次式で表される。

$$\rho(t) = \sum_{a=1,2,3,4} K_a(t)\rho(0)K_a^\dagger(t)$$

$$K_1(t) = \sqrt{1-P}(|0\rangle\langle 0| + e^{\frac{-\Gamma t}{2}}|1\rangle\langle 1|)$$

$$K_3(t) = \sqrt{P}(e^{\frac{-\Gamma t}{2}}|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

$$K_2(t) = \sqrt{1-P}(\sqrt{1-e^{-\Gamma t}}|0\rangle\langle 1|)$$

$$K_4(t) = \sqrt{P}(\sqrt{1-e^{-\Gamma t}}|1\rangle\langle 0|)$$

上式を用いて$\rho(0) = |\,0\,\rangle\langle\,0\,|$,　$\rho(0) = |\,1\,\rangle\langle\,1\,|$の時刻$t \to \infty$での密度演算子を求めると、

$$\rho(\infty) = (1 - P)|\,0\,\rangle\langle\,0\,| + P|\,1\,\rangle\langle\,1\,|$$

となる。　ここでPは、

$$P = P_1 = \frac{e^{-\frac{\epsilon_1}{kT}}}{e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}}+e^{-\frac{\epsilon_1}{kT}}} = \frac{e^{-\frac{(\epsilon_1-\epsilon_0)}{kT}}}{1+e^{-\frac{(\epsilon_1-\epsilon_0)}{kT}}} \qquad (P_1 : t \to \infty\text{で励起状態に留まる確率。})$$

$$\begin{cases} T = 0 \quad \to \quad \rho(\infty) = |\,0\,\rangle\langle\,0\,| \\ T = \infty \quad \to \quad \rho(\infty) = \frac{1}{2}(|\,0\,\rangle\langle\,0\,| + |\,1\,\rangle\langle\,1\,|) \end{cases}$$

エンタングルメントのConcurrence (有限温度)

有限温度では一般に二つの２準位原子の光の放射と吸収は次式で表される。

$$\rho(t) = \sum_{a,b=1}^{4} K_a(t) \otimes K_b(t)\rho(0)K_a^\dagger(t) \otimes K_b^\dagger(t)$$

$$K_1(t) = \sqrt{1-P}(|\,0\,\rangle\langle\,0\,| + e^{\frac{-\Gamma t}{2}}|\,1\,\rangle\langle\,1\,|)$$

$$K_3(t) = \sqrt{P}(e^{\frac{-\Gamma t}{2}}|\,0\,\rangle\langle\,0\,| + |\,1\,\rangle\langle\,1\,|)$$

$$K_2(t) = \sqrt{1-P}(\sqrt{1-e^{-\Gamma t}}|\,0\,\rangle\langle\,1\,|)$$

$$K_4(t) = \sqrt{P}(\sqrt{1-e^{-\Gamma t}}|\,1\,\rangle\langle\,0\,|)$$

時刻 $t=0$ で純粋状態

$$\rho(0) = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad \left(|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad C(\rho) = \max\left\{ e^{-\Gamma t} - 2P(1-P)(1-e^{-\Gamma t})\sqrt{1 + e^{-2\Gamma t} + e^{-\Gamma t}(\frac{1}{P(1-P)} - 2)},\ 0 \right\}$$

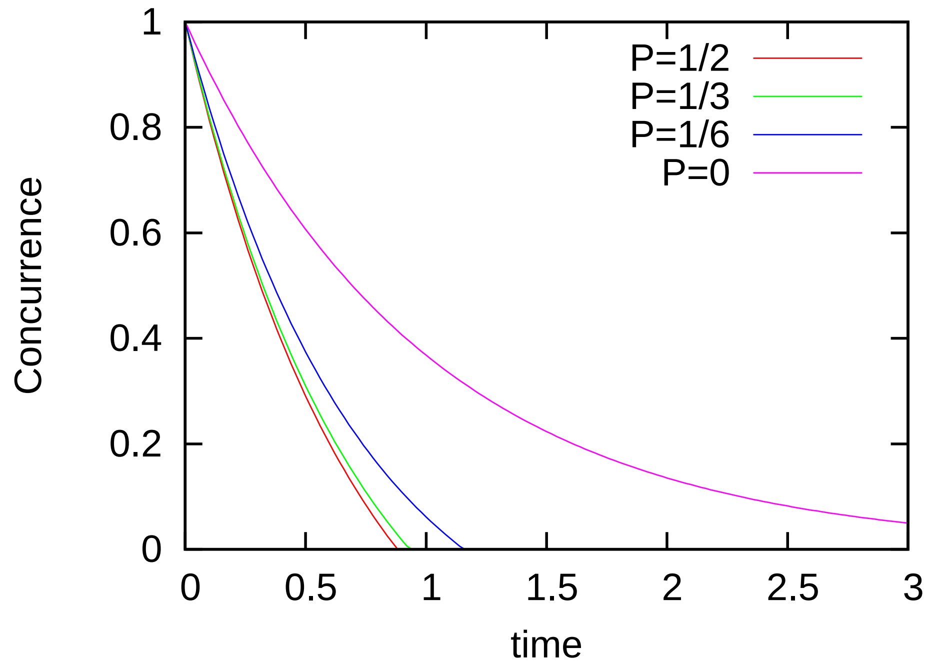
$T = 0$

$$C(\rho) = e^{-\Gamma t}$$

$T = \infty$

$$C(\rho) = \frac{1}{2}(e^{-\Gamma t} + 1)^2 - 1$$

$$\Gamma t = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$$ で突然死する。



結論

- 量子エンタングルメントを利用することで、様々な量子情報的な作業を行うことが出来る。
(量子テレポーテーションやSuper dense codingなど)

- 量子テレポーテーションの忠実度 F はエンタングルメントの指標であるConcurrenceと同じになる。

- 温度 $T=0$ で独立に自然放射を行う2準位原子を考えたとき、
励起した状態 $|11\rangle$ とエンタングルした状態 $|\psi\rangle$ との混合状態ではConcurrenceの値は有限の t で0になることがあり、突然死する。$\left(|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)\right)$

- 有限温度では時刻 $t=0$ で純粋状態でもConcurrenceの値は有限の t で0になり、突然死する。

補足１(量子テレポーテーション)

- ベル基底

$$
\begin{cases}
|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\
|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\
|\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |10\rangle)
\end{cases}
$$

- ユニタリー変換

$$
\begin{cases}
U_1 = 1 \\
U_2 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\
U_3 = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \\
U_4 = U_2 U_3
\end{cases}
$$

- 量子テレポーテーション

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle_{abc} = &|\Phi_1\rangle_{ac}\left(\frac{C_0\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}|0\rangle_b + \frac{C_1\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}}|1\rangle_b\right) + |\Phi_2\rangle_{ac}\left(\frac{C_0\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}|0\rangle_b - \frac{C_1\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}}|1\rangle_b\right) \\
&+ |\Phi_3\rangle_{ac}\left(\frac{C_0\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}}|1\rangle_b + \frac{C_1\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}|0\rangle_b\right) + |\Phi_4\rangle_{ac}\left(\frac{C_0\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}}|1\rangle_b - \frac{C_1\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}|0\rangle_b\right)
\end{aligned}
$$

AliceがBell測定を行う2bit(4通り)のいづれかの測定結果を得る

→その結果に応じてBobはユニタリー変換を行う。

補足２ (Concurrence)

- **Schmidtの標準形を用いる場合**

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \\
&= (\alpha_{00}|0\rangle_a + \alpha_{10}|1\rangle_a)|0\rangle_b + (\alpha_{01}|0\rangle_a + \alpha_{11}|1\rangle_a)|1\rangle_b \\
&= \sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2}\left(\frac{\alpha_{00}|0\rangle_a + \alpha_{10}|1\rangle_a}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2+|\alpha_{10}|^2}}\right)|0\rangle_b + \sqrt{|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2}\left(\frac{\alpha_{01}|0\rangle_a + \alpha_{11}|1\rangle_a}{\sqrt{|\alpha_{01}|^2+|\alpha_{11}|^2}}\right)|1\rangle_b \\
&= \sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2}|0'\rangle_a|0'\rangle_b + \sqrt{|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2}|1'\rangle_a|1'\rangle_b \\
&= \sqrt{\alpha}|0'\rangle_a|0'\rangle_b + \sqrt{\beta}|1'\rangle_a|1'\rangle_b
\end{aligned}
$$

$$C(\Phi) = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

- **y方向のパウリ行列を用いる場合**

$$\theta = \sigma_y \otimes \sigma_y K$$

$$= (-|00\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| - |11\rangle\langle 00|)K$$

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \\
&= \sqrt{\alpha}|0'\rangle_a|0'\rangle_b + \sqrt{\beta}|1'\rangle_a|1'\rangle_b
\end{aligned}
$$

$$C(\Phi) = |\langle\Phi|\theta|\Phi\rangle| = \left|-2\sqrt{\alpha\beta}\right| = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

補足3(密度演算子)

ある状態$|\Phi\rangle$が次のように表されている.

$$|\Phi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + \cdots + c_a|a\rangle + \cdots = \sum_{a=1}^{n} c_a|a\rangle$$

正規直交基底で測定をすると、結果aを得る確率は

$$P_a = |c_a|^2 = |\langle a|\Phi\rangle|^2$$

確率q_1で純粋状態$|\phi\rangle_1$、確率q_2で純粋状態$|\phi\rangle_2$のような混合状態にある量子系を正規直交基底で測定を行い、結果aを得る確率

$$\begin{aligned}
P_a &= q_1|\langle a|\phi_1\rangle|^2 + q_2|\langle a|\phi_2\rangle|^2 \\
&= q_1\langle a|\phi_1\rangle\langle\phi_1|a\rangle + q_2\langle a|\phi_2\rangle\langle\phi_2|a\rangle \\
&= \langle a|(q_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + q_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|)|a\rangle \\
&= \langle a|\rho|a\rangle \\
\rho &\equiv q_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + q_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|
\end{aligned}$$

確率q_iで状態$|\phi_i\rangle$にあるような混合状態での密度演算子は

$$\rho = \sum_i q_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$