

修士論文

原子核の相対論的平均場模型  
プログラムの開発と検証

2008年2月

福井大学 大学院 工学研究科 物理工学専攻

18年度入学 10番 三和 之浩

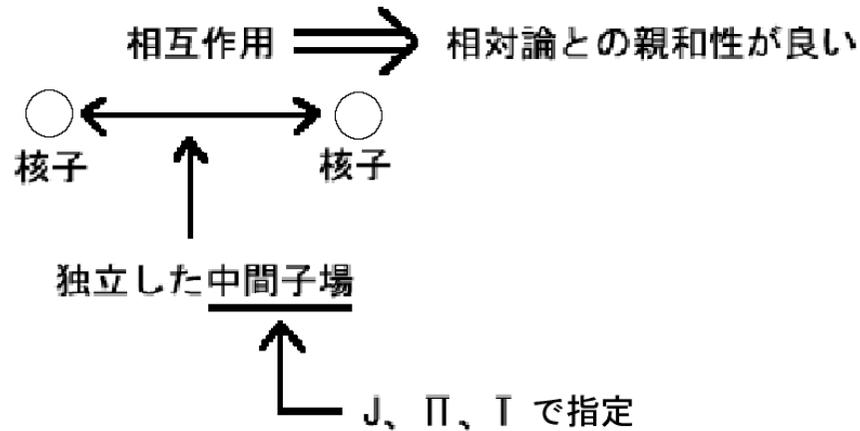
## 本研究の目的

- 原子核の相対論的平均場模型の数値解を、密度分布に球対称性を課して求めるためのC言語プログラムの作成。
- その動作の検証を C.J.Horowitz and B.D.Serot(1981)の文献に掲載された種々の計算結果との比較により行うこと。

# 模型の物理的な位置付け

## 核力を表す有効中間子場

原子核を相対論的に記述したい。



- $\sigma$  : アイソスカラー・スカラー場  $\Phi(x^\mu)$
- $\omega$  : アイソスカラー・ベクトル場  $V_\nu(x^\mu)$
- $\rho$  : アイソベクトル・ベクトル場  $R_\nu(x^\mu)$
- $\gamma$  : 光子のベクトル場  $A_\nu(x^\mu)$

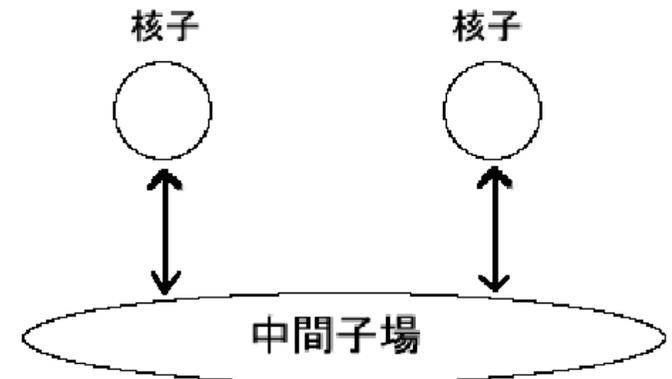
# 中間子場の古典場近似

ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi + \mathcal{L}_{\text{meson}}^{(\text{free})} - g_\sigma \Phi \bar{\psi} \psi$$

で記述される最も単純なモデルで説明する。

平均場近似とは、中間子場の全ての量子的揺動を無視し、期待値だけに注目するという近似法  $\Rightarrow$  全ての中間子場を古典的な c-数 (classical number) の場として扱う近似



# no sea 近似 (負エネルギー状態の核子の無視)

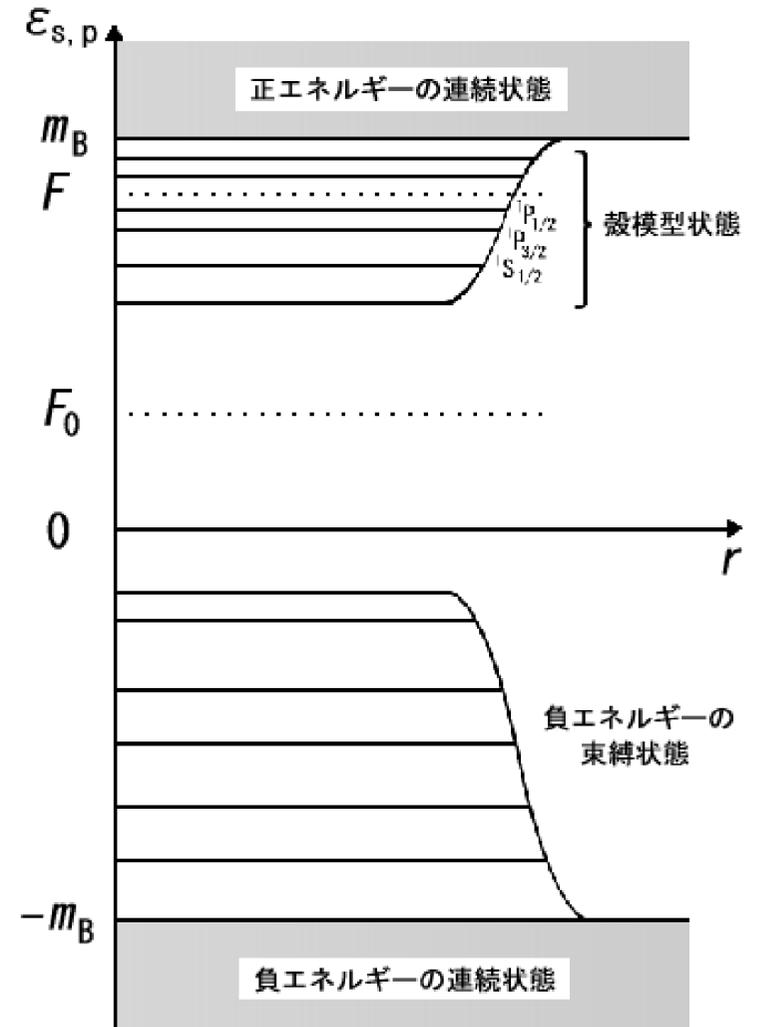
核子場の演算子  $\psi$

$$\psi = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x^{\mu}) \hat{a}_{\alpha} .$$

スカラー密度

$$\langle : \bar{\psi} \psi : \rangle = \sum_{\alpha < F} \bar{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\alpha} - \sum_{\alpha < F_0} \bar{\varphi}_{\alpha}^{\text{free}} \varphi_{\alpha}^{\text{free}} ,$$

$$\begin{aligned} \langle : \bar{\psi} \psi : \rangle &= \sum_{\alpha=1}^A \bar{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\alpha} + \left( \sum_{\alpha < F_0} \bar{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\alpha} - \sum_{\alpha < F_0} \bar{\varphi}_{\alpha}^{\text{free}} \varphi_{\alpha}^{\text{free}} \right) \\ &\sim \sum_{\alpha=1}^A \bar{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\alpha} . \end{aligned}$$



# 模型の数学的定式化

## 核子の性質

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{スピン} \\ \text{アイソスピン} \end{array} \right. t = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{ll} \text{中性子} & t_3 = \frac{1}{2}, \\ \text{陽子} & t_3 = -\frac{1}{2}. \end{array} \right. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2}, \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} m_p c^2 = 938.27200 \text{ MeV}, \\ m_n c^2 = 939.56533 \text{ MeV}. \end{array} \right. \end{array}$$

「結果の検証」では比較対象の文献に合わせて

$$m_p c^2 = m_n c^2 = 939 \text{ MeV}$$

とする。

## 自然単位系

$$\hbar = c = 1 .$$

## 有効場のラグランジアン密度

$$L = L_N + L_\sigma + L_\omega + L_\rho + L_\gamma + L_C .$$

核子部分

$$L_N = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi .$$

$\sigma$  中間子部分

$$L_\sigma = -\frac{1}{2} \{ (\nabla \phi_\sigma)^2 + m_\sigma^2 \phi_\sigma^2 \} .$$

$\omega$  中間子部分

$$L_\omega = \frac{1}{2} \{ (\nabla\phi_\omega)^2 + m_\omega^2\phi_\omega^2 \} .$$

$\rho$  中間子部分

$$L_\rho = \frac{1}{2} \{ (\nabla\phi_\rho)^2 + m_\rho^2\phi_\rho^2 \} .$$

光子場部分

$$L_\gamma = \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 .$$

核子場と中間子場・光子場の結合 (Coupling)

$$L_c = -g_\sigma \bar{\psi} \phi_\sigma \psi - g_\omega \bar{\psi} \gamma_0 \phi_\omega \psi - g_\rho \bar{\psi} \gamma_0 \tau_3 \phi_\rho \psi - e \bar{\psi} \frac{1 - \tau_3}{2} \gamma_0 A_0 \psi .$$

## 核子場、中間子場の従う方程式

Dirac 方程式 (核子場)

$$\begin{aligned} \{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta(m + V_s) + V_V\} \psi_i &= E_i \psi_i, \\ V_s &= -g_\sigma \phi_\sigma, \\ V_V &= g_\omega \phi_\omega + g_\rho \tau_3 \phi_\rho + e \frac{1 - \tau_3}{2} A^0. \end{aligned}$$

Screened Poisson 方程式 (中間子場  $\sigma, \omega, \rho$ )

$$\begin{aligned} (\Delta - m_\sigma^2) \phi_\sigma &= -g_\sigma \rho_s, \\ (\Delta - m_\omega^2) \phi_\omega &= -g_\omega \rho_V, \\ (\Delta - m_\rho^2) \phi_\rho &= -g_\rho \rho_3. \end{aligned}$$

Poisson 方程式 (クーロン場  $\gamma$ )

$$\Delta A_0 = -e \rho_p.$$

# 球対称な系の取扱い

## 核子の波動関数

球対称系での核子の波動関数

$$\psi_{\varpi j m t_3}(r, \theta, \varphi, m_S, m_t) = \begin{pmatrix} i \frac{G_{\varpi j t_3}(r)}{r} \Phi_{l j m}(\theta, \varphi, m_S) \\ -\frac{F_{\varpi j t_3}(r)}{r} \Phi_{l' j m}(\theta, \varphi, m_S) \end{pmatrix} \delta_{t_3 m_t} .$$

但し

$$l = j + \frac{1}{2} \varpi ,$$

$$l' = j - \frac{1}{2} \varpi ,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{l j m}(\theta, \varphi, m_S) &= \sum_{m_1, m_2} \langle l, m_1, \frac{1}{2}, m_2 | j m \rangle Y_{l, m_1}(\theta, \varphi) \delta_{m_S m_2} , \\ &= \langle l, m - m_S, \frac{1}{2}, m_S | j m \rangle Y_{l, m - m_S}(\theta, \varphi) . \end{aligned}$$

## 核子の状態を指定する為の量子数

核子の状態

$$j, \varpi \left\{ \begin{array}{l} j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (\text{半奇数}). \\ \varpi = \pm 1. \end{array} \right.$$

副次的な量

$$\kappa = \varpi \left( j + \frac{1}{2} \right) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

$$\left. \begin{array}{l} G : l = j + \frac{1}{2}\varpi \\ F : l' = j - \frac{1}{2}\varpi \end{array} \right\} = 0, 1, 2, \dots.$$

# 軌道の表

$j$	$\varpi$	$l$	$l'$	$\kappa$	軌道を表す記号
$\frac{1}{2}$	-1	0	1	-1	$s_{\frac{1}{2}}$
	1	1	0	1	$p_{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{2}$	-1	1	2	-2	$p_{\frac{3}{2}}$
	1	2	1	2	$d_{\frac{3}{2}}$
$\frac{5}{2}$	-1	2	3	-3	$d_{\frac{5}{2}}$
	1	3	2	3	$f_{\frac{5}{2}}$
$\frac{7}{2}$	-1	3	4	-4	$f_{\frac{7}{2}}$
	1	4	3	4	$g_{\frac{7}{2}}$
$\frac{9}{2}$	-1	4	5	-5	$g_{\frac{9}{2}}$
	1	5	4	5	$h_{\frac{9}{2}}$
$\frac{11}{2}$	-1	5	6	-6	$h_{\frac{11}{2}}$
	1	6	5	6	$i_{\frac{11}{2}}$
$\frac{13}{2}$	-1	6	7	-7	$i_{\frac{13}{2}}$
	1	7	6	7	$j_{\frac{13}{2}}$

## 動径波動関数の従う方程式

$G$  : large component ,

$F$  : small component .

核子の動径波動関数

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{r} & \mu + \varepsilon \\ \mu - \varepsilon & \frac{\kappa}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$$

但し

$$\mu = m + V_s, \quad \varepsilon = E - V_v.$$

## 各種の核子密度

$$\rho_S(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_i n_i \{ |G_i(r)|^2 - |F_i(r)|^2 \} ,$$

$$\rho_V(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_i n_i \{ |G_i(r)|^2 + |F_i(r)|^2 \} ,$$

$$\rho_3(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_i n_i (\tau_3)_i \{ |G_i(r)|^2 + |F_i(r)|^2 \} ,$$

$$\rho_p(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_i n_i \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right)_i \{ |G_i(r)|^2 - |F_i(r)|^2 \} .$$

$$i \text{ 番目の軌道が } \begin{cases} \text{中性子の軌道なら、} (\tau_3)_i = 1, \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right)_i = 0. \\ \text{陽子の軌道なら、} (\tau_3)_i = -1, \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right)_i = 1. \end{cases}$$

# 核子の波動関数の求め方

## 境界条件

$r \rightarrow +0$ での漸近形

$r = 0$ でのテーラー展開

$$G = r^{l+1} - \frac{\varepsilon^2 - \mu^2}{2(2l+3)} r^{l+3} + O(r^{l+5}),$$
$$F = \frac{l+1+\kappa}{\varepsilon+\mu} r^l - \frac{l+3+\kappa}{2(2l+3)} (\varepsilon - \mu) r^{l+2} + O(r^{l+4}).$$

但し

$$\begin{cases} \varepsilon = E - V_V(r=0), \\ \mu = m + V_S(r=0). \end{cases}$$

$r \rightarrow +\infty$ での漸近形

$r = +\infty$ でのテーラー展開

$$G = e^{-\sqrt{m^2 - E^2} r},$$
$$F = -\sqrt{\frac{m-E}{m+E}} e^{-\sqrt{m^2 - E^2} r}.$$

# エネルギー固有値の求め方

## Matching condition

接続条件

$$E = E_0 \Leftrightarrow \frac{G_1(r_m)}{F_1(r_m)} = \frac{G_2(r_m)}{F_2(r_m)},$$

$$D = G_1(r_m)F_2(r_m) - F_1(r_m)G_2(r_m) = 0.$$

## エネルギー固有値探索のアルゴリズム

$$D' = G_1(r_m)G_2(r_m)\{G_1(r_m)F_2(r_m) - F_1(r_m)G_2(r_m)\}.$$

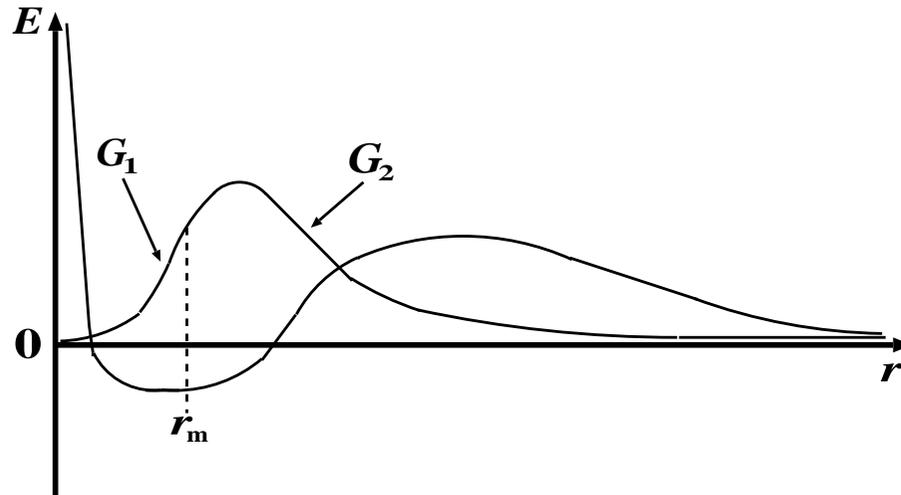
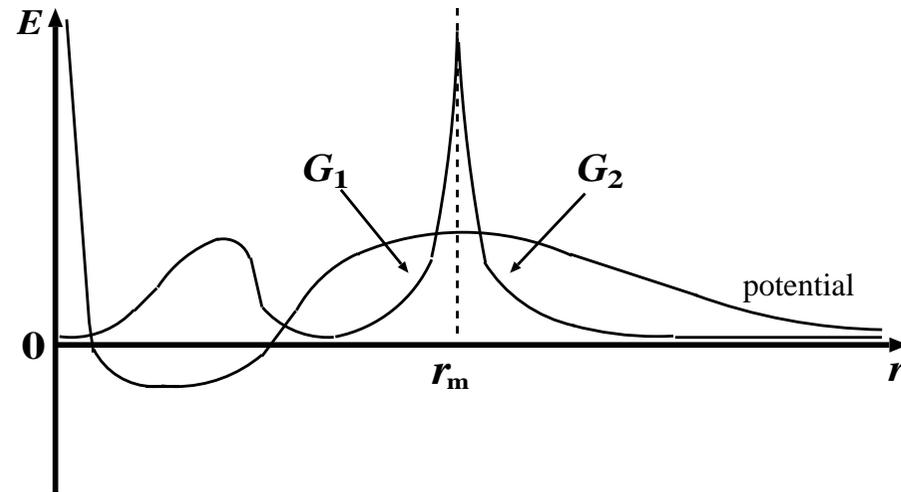
$$\left\{ \begin{array}{l} n < n_0 \text{ なら} \\ n > n_0 \text{ なら} \\ n = n_0 \text{ なら} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} E < E_0. \\ E > E_0. \\ \left\{ \begin{array}{l} D' < 0 \text{ なら} \\ D' = 0 \text{ なら} \\ D' > 0 \text{ なら} \end{array} \right. \begin{array}{l} E < E_0. \\ E = E_0. \\ E > E_0. \end{array} \end{array} \right.$$

## Matching pointの選択

### 動径グリッドのとり方

等間隔グリッド

$$r_i = h \cdot i, \quad 0 \leq i \leq 3000,$$
$$h = 0.01 \text{ fm}.$$



# 中間子場の求め方

Screened Poisson 方程式

$$(\Delta - m^2)\phi = -g\rho,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - m^2\right)\phi(r) = -g\rho(r).$$

この方程式の解

$$\phi(r) = g\frac{e^{-mr}}{mr} \int_0^r \sinh(mr')\rho(r')r'dr' + g\frac{\sinh(mr)}{mr} \int_r^\infty e^{-mr'}\rho(r')r'dr'.$$

$m \rightarrow 0$ にするとクーロンポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{g}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2dr' + g \int_r^\infty \rho(r')r'dr'.$$

# 自己無撞着解の求め方

## 自己無撞着解を得るためのアルゴリズム

1.  $V_S$ 、 $V_V$  に対する核子のエネルギー固有値  $E_i$  と波動関数を求める。
2.  $E_i$  の低い状態から占拠核子数  $n_i$  を割り当て、各種の核子密度を得る。
3. 核子密度を源とする中間子場の古典解を求め、得られた中間子場を組み合わせて  $V_S$ 、 $V_V$  を作る。
4. 3. で得られた  $V_S$ 、 $V_V$  が 1. で使用した  $V_S$ 、 $V_V$  と異なるなら、1. に戻る。逆に差が非常に小さければ、自己無撞着解が得られたことになる。

## 原子核の全エネルギーの表式

原子核の全エネルギー  $E$

$$E = \sum_i n_i E_i - \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ -g_\sigma \phi_\sigma(r) \rho_s(r) + g_\omega \phi_\omega(r) \rho_v(r) + g_\rho \phi_\rho(r) \rho_3(r) + eA_0(r) \rho_p(r) \right\} 4\pi r^2 dr .$$

## $V_s, V_v$ の初期値の設定法

空間的に一様な系では  $\Delta\phi = 0$  なので

$$(\Delta - m^2)\phi = -g\rho$$

より、

$$\phi = \frac{g}{m^2}\rho$$

を得る。

$$\rho_n = 0.16 \frac{N}{A} (\text{fm}^{-3}), \quad \rho_p = 0.16 \frac{Z}{A} (\text{fm}^{-3})$$

と仮定すれば

$$\begin{aligned}\rho_V &= \rho_n + \rho_p = 0.16, \\ \rho_S &\doteq \rho_V \times 0.9, \\ \rho_3 &= \rho_n - \rho_p = 0.16 \frac{N - Z}{A}\end{aligned}$$

が導かれ、ポテンシャルの深さは

$$\begin{aligned}V_V^{(0)} &= \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_V + \tau_3 \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \rho_3, \\ V_S^{(0)} &= -\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_S\end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}V_V(r) &= \frac{V_V^{(0)}}{1 + \exp\left(-\frac{r-R}{a}\right)} + V_{\text{coul}}(r), \\ V_S(r) &= \frac{V_S^{(0)}}{1 + \exp\left(-\frac{r-R}{a}\right)}\end{aligned}$$

とすればよい。但し、

$$\begin{aligned}a &= 0.7 \text{ fm} , \\R &= r_0 A^{\frac{1}{3}} , \\r_0 &= 1.2 \text{ fm}\end{aligned}$$

とし、クーロンポテンシャルは陽子に対してのみ働き、

$$V_{\text{coul}}(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{4\pi R} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right\} & (r \leq R) \\ \frac{Ze^2}{4\pi r} & (r > R) \end{cases}$$

と近似するとよい。

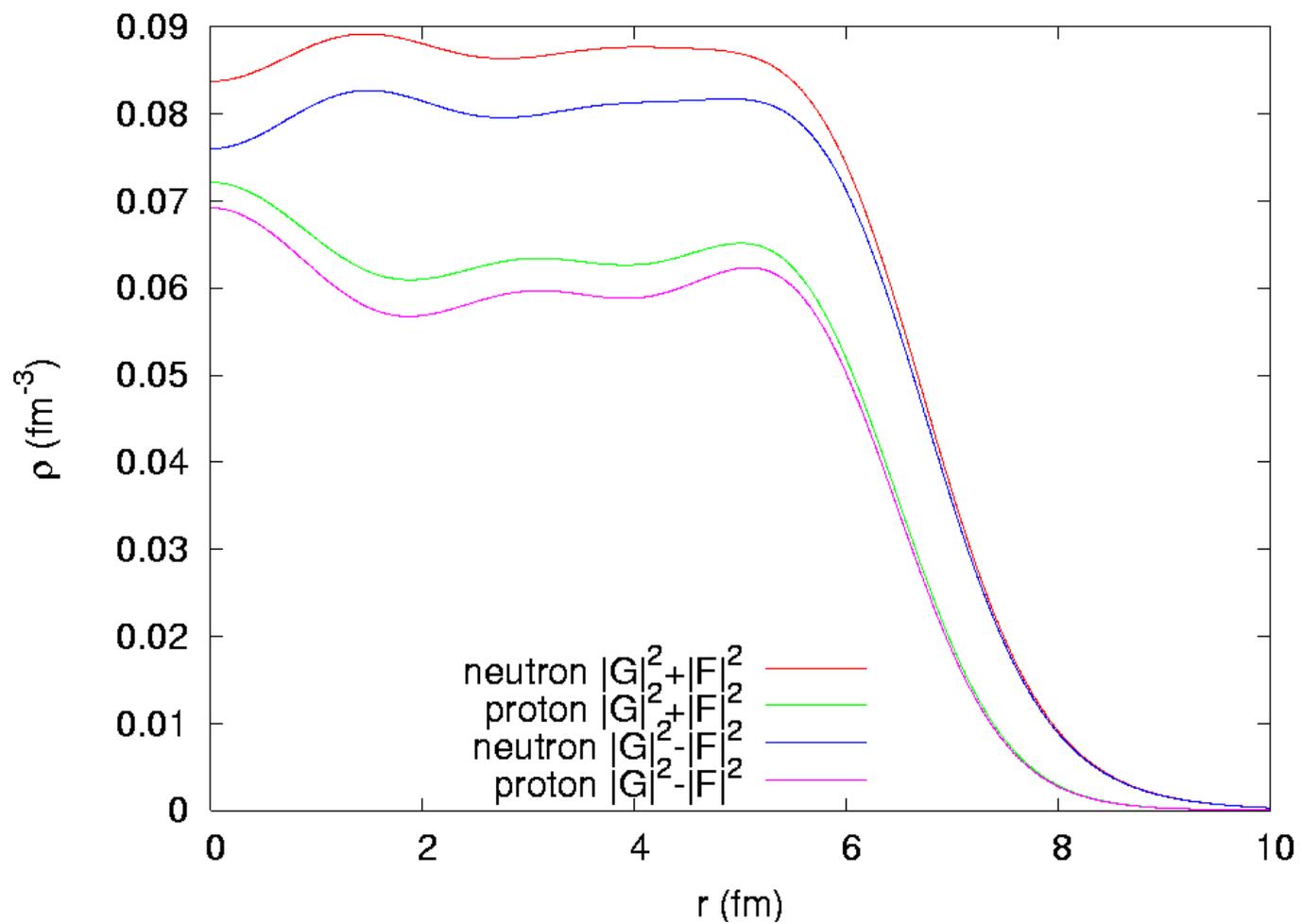
# 結果と検証

## $^{208}\text{Pb}$ について

$^{208}\text{Pb}$ の密度

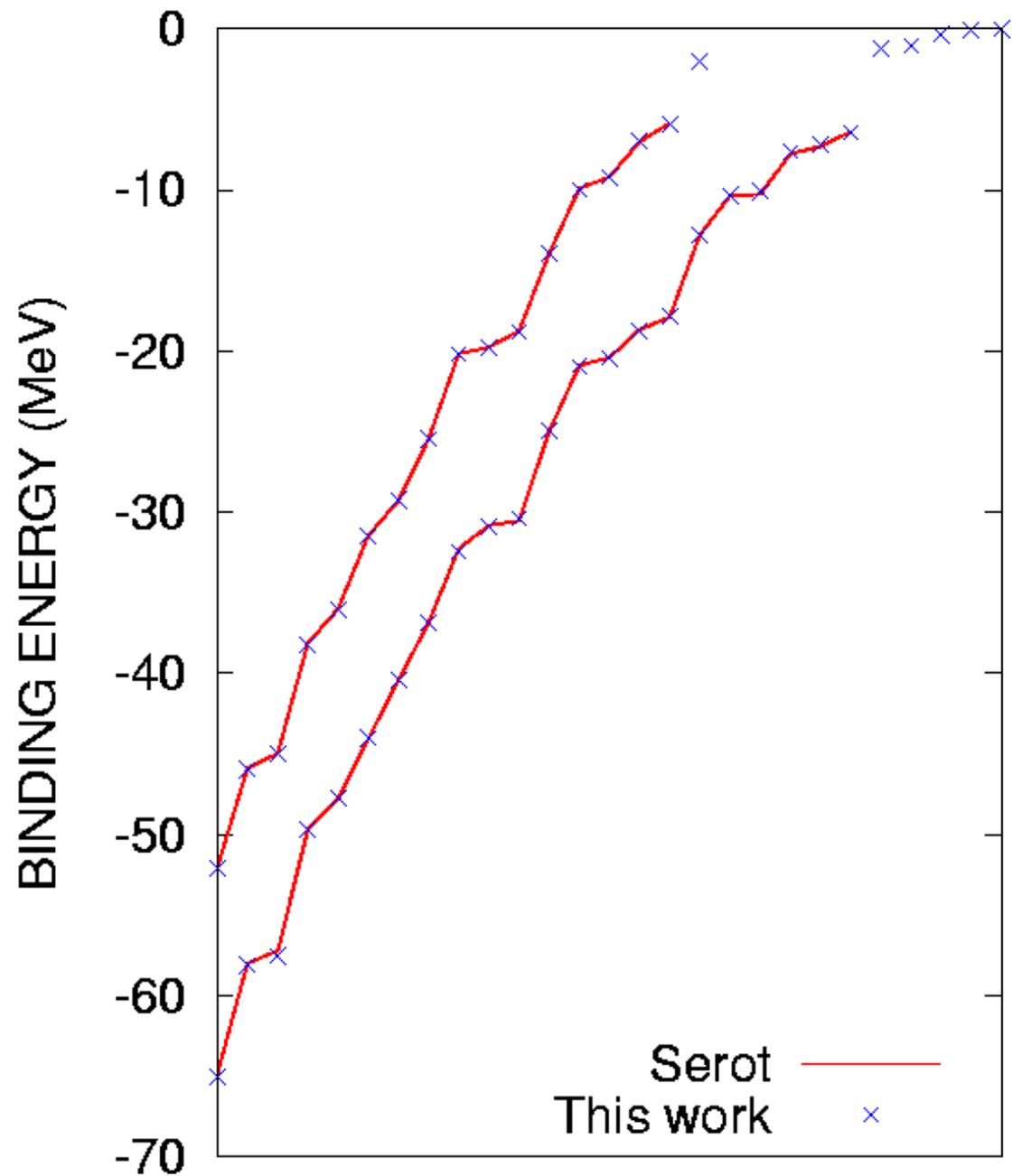
$$0.16 \times \frac{N}{A} = 0.16 \times \frac{126}{208} \\ = 0.097 \text{fm}^{-3},$$

$$0.16 \times \frac{Z}{A} = 0.16 \times \frac{82}{208} \\ = 0.063 \text{fm}^{-3}.$$



$^{208}\text{Pb}$ のスペクトル

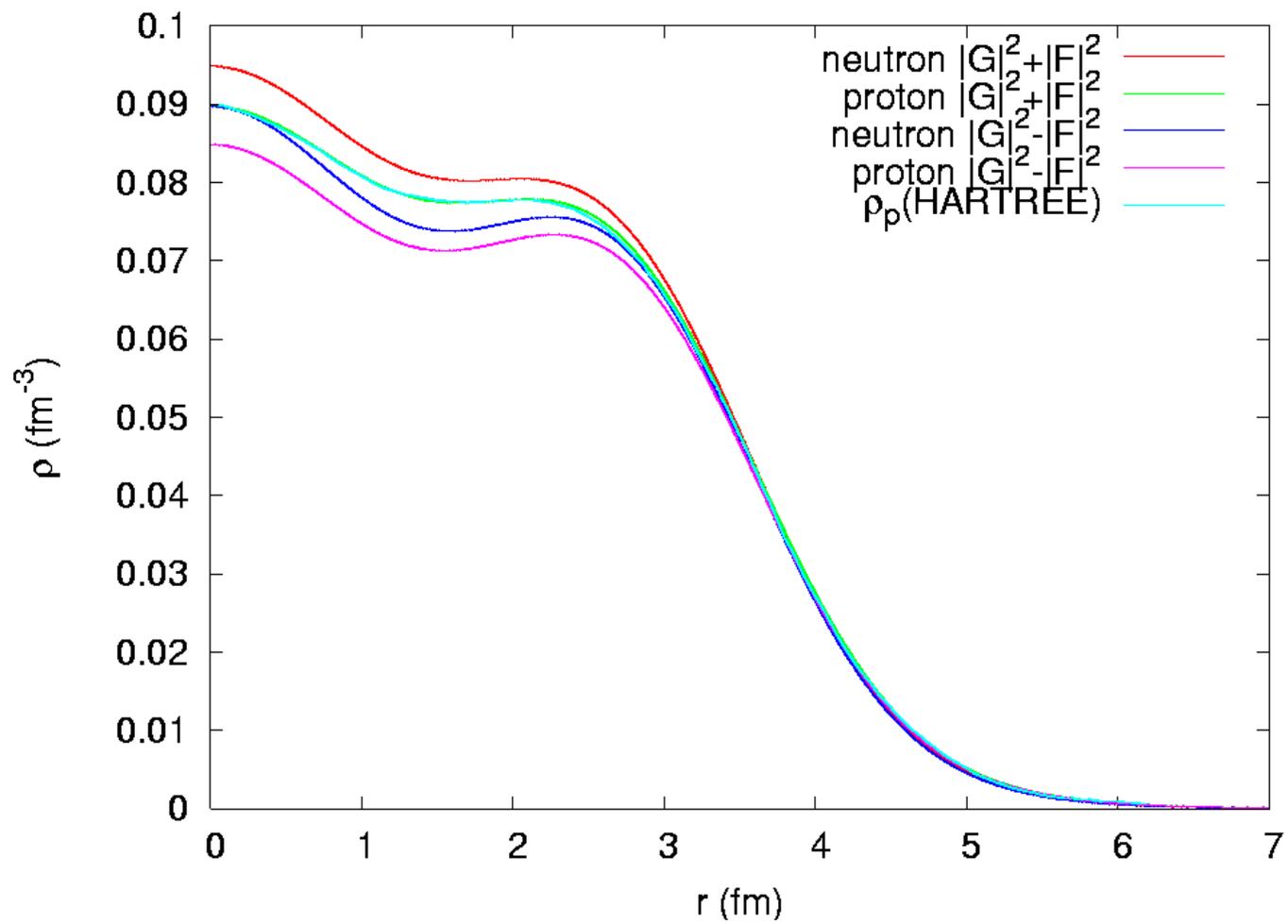
Horowitz and Serot,  
Nucl. Phys. **A368**, 523  
(1981)  
との比較。



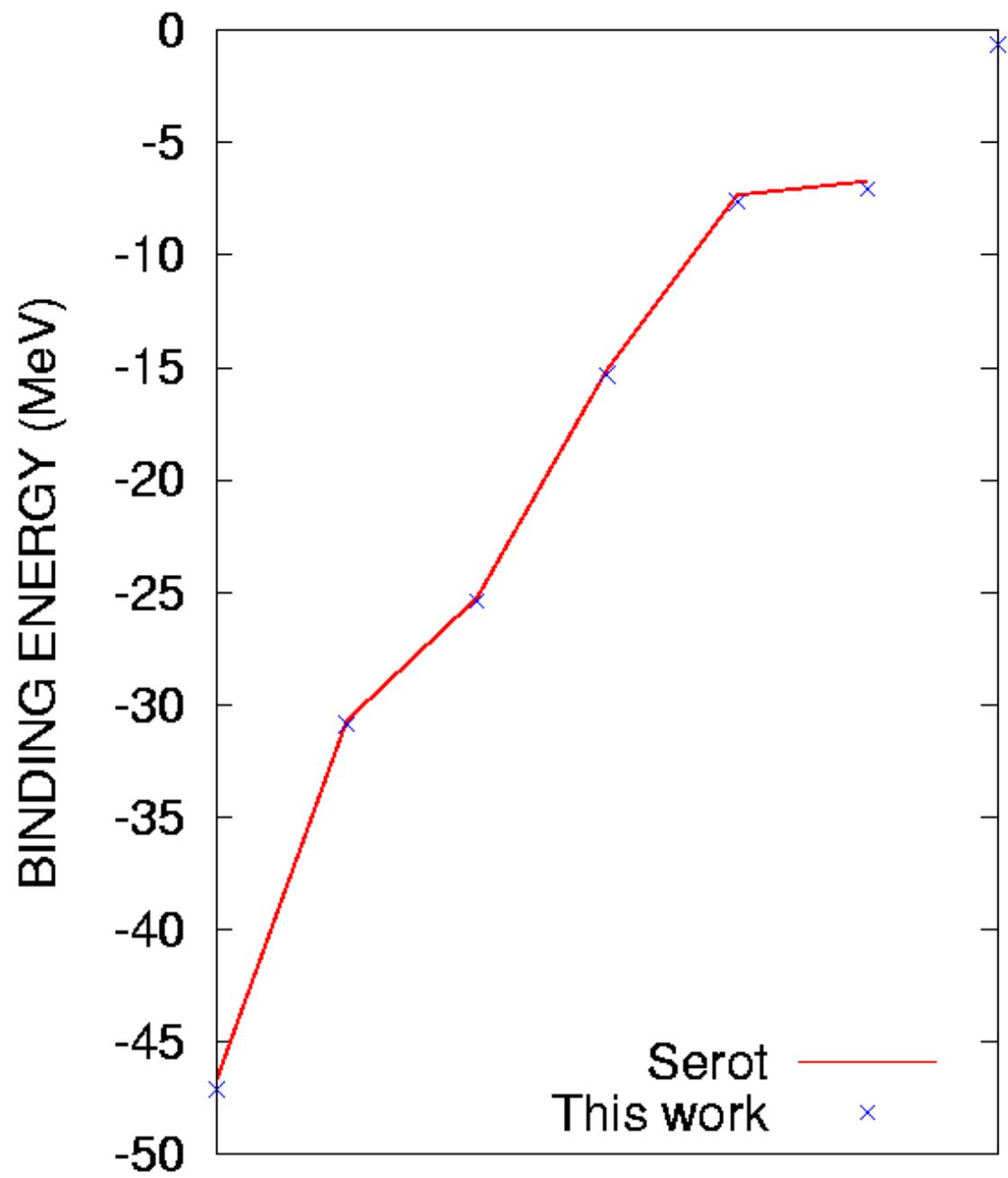
# $^{40}\text{Ca}$ について

## $^{40}\text{Ca}$ の密度

$$\begin{aligned} 0.16 \times \frac{N}{A} &= 0.16 \times \frac{Z}{A}, \\ &= 0.16 \times \frac{20}{40}, \\ &= 0.08 \text{fm}^{-3}. \end{aligned}$$



$^{40}\text{Ca}$ のスペクトル



## 結論と展望

- 本研究では、原子核の相対論的平均場模型の数値解を、密度分布に球対称性を課して求めるC言語プログラムを開発し、C.J.Horowitz and B.D.Serot(1981)の文献に掲載された種々の計算結果と比較してその正しさを検証することができた。
- 今後、このプログラムを使って原子核の研究が成されるを望む。