

補助 qubit を使った

量子状態推定

2008年2月

福井大学 工学部 物理工学科

04380223 國安 京

# 目次

序章	2
第1章 量子情報	3
1.1 qubit . . . . .	3
1.2 正規直交基底 . . . . .	3
1.3 射影測定 . . . . .	4
1.4 Bloch 球 . . . . .	4
第2章 量子状態推定	6
2.1 量子状態推定と忠実度 . . . . .	6
2.2 2 qubit の測定方法 . . . . .	7
2.3 本研究の目的 . . . . .	7
第3章 qubit の測定	8
3.1 1 qubit . . . . .	8
3.2 (1) 別々に測定した場合-1 . . . . .	9
3.3 (1) 別々に測定した場合-2 . . . . .	11
第4章 補助 qubit	13
4.1 (2)2つの qubit を1つの系とみなした場合 . . . . .	13
4.1.1 一般式 . . . . .	13
4.1.2 ベル基底 . . . . .	15
4.2 (3) 補助 qubit を用いた場合 . . . . .	16
第5章 まとめ	19
5.1 本研究のまとめ . . . . .	19
参考文献	21
謝辞	22
付録 A qubit の内積公式	23
付録 B Bloch 球上で平均した各成分の平均	24
付録 C 演算子-1	25
付録 D 演算子-2	26

# 序章

現在、私たちの生活にはコンピュータの存在が欠かせないほど、関わりが密接になっている。そしてその役割は日々重要さを増し、生活全体に広く浸透している。普段私たちが使っているコンピュータはコンピュータ工学の発展によって、演算速度や記憶容量などが年々向上している。そうした処理能力の向上によって私たちの生活は日々変化を遂げているのであるが、現在のコンピュータを凌ぐ処理能力を持つコンピュータがある。それは量子コンピュータと呼ばれ、未だ実験段階にあるが、その実現に向け様々な努力がなされ実用化に期待が高まっている。この量子コンピュータは現在使われているコンピュータとは異なり、量子力学に従い、量子情報理論によって記述される [1][2]。

現在のコンピュータにもトランジスタなどに量子力学が用いられているが、これらと量子コンピュータの本質的な違いは、量子コンピュータではアルゴリズムに量子力学の原理や法則が用いられている点である。現在のコンピュータはその最小単位にビット (bit) が用いられ、ビットは0または1の状態をとる。これに対して量子コンピュータの最小単位には量子ビット (qubit) が用いられ、0または1、さらには0と1の重ね合わせの状態もとる。この重ね合わせの状態にある qubit を複数利用することによって、従来の計算機では成し得なかった並列性が実現する。また、EPR(A.Einstein,B.Podolski,N.Rosen) 対とも呼ばれる量子もつれ合い (非局所性) 状態も量子情報理論には用いられる。これを量子エンタングルメントとも呼び、量子テレポーテーションや、盗聴不可能な量子暗号などに応用される。なお、今回はこの量子エンタングルメントについては本文中では扱わない。

量子力学において、もう1つ重要となってくる性質がある。それは、測定を行うことでその対象の状態は壊れ、測定の結果は確率的に現れる、ということである。これは古典力学ではみられない特徴的な性質であるが、量子コンピュータにおいてもまた、これは同様に現れる。では、qubit の状態が0なのか、1なのか、または0と1の重ね合わせた状態なのか。その状態をどのようにして知ることができるであろうか。

そこで、本論文では状態がわからない qubit を測定したときに、その結果からどのように状態を推定するかという量子状態推定について議論する。そして、推定した状態がどれだけもとの状態の qubit に忠実であるかを示す忠実度をできるだけ大きくする推定方法について調べる。

昨年度の出口智美氏による卒業研究で、qubit が1つ与えられた場合、それから同じ状態にある qubit が複数 (2つ、3つ、4つ) 与えられた場合のある1つの測定方法での忠実度が求められた [6]。今回はこの出口氏の結果を受けて、はじめにある同じ状態にある qubit が2つ与えられた場合について考える。ある同等な qubit が2つ与えられた場合に、この qubit の状態を推定するための測定には3種類の方法がある。(1) その2つの qubit をそれぞれ測定する方法、(2) 2つを1つの系とみなして測定する方法、(3) 補助 qubit を加え3つを1つの系とみなして測定する方法である。出口氏によって、(1) 別々に測定する方法での忠実度が求められている。この結果から、2つを別々に測定するよりもこれらを1つの系とみなし、全体を測定する方がより大きな忠実度が得られるのではないか、という予想を立てた。そこで、qubit が2つ与えられた場合の(2)、(3)の測定方法によって状態推定したときの忠実度を求め、この結果を比較した。

# 第1章 量子情報

私たちの生活で使う情報手段は古典的情報理論によって記述され、古典的な物理法則に従う。これに対し、量子力学に従う情報理論を量子情報理論という。この量子情報はまだ実用化には至っていないが、それに関する様々な実験がなされ、成功が報告されている。この量子情報では量子力学に従うため、量子力学の特徴的な性質が現れ、これによって古典的な情報にはない処理能力を持った量子コンピュータが実現する。

## 1.1 qubit

量子情報の最小単位には qubit が用いられる。これは古典的情報の bit(ビット) に対応するものである。qubit は最も小さな量子系であり、2つの量子状態の線形結合で表される。例えばスピン  $\frac{1}{2}$  の粒子や、光子の偏光などである。

今 qubit の2つの状態を  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  とすると qubit はその状態を  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  の他にそれらを重ね合わせた状態もとる。この重ね合わせの状態は次の式のように表すことができる。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

ここで  $\alpha$  と  $\beta$  は複素数である。この qubit を測定すると、 $|\alpha|^2$  の確率で状態 0、 $|\beta|^2$  の確率で状態 1 という結果が得られる。また全確率の和は 1 であるので

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.2)$$

となり、qubit の長さは 1 に正規化され、これにより qubit の状態は 2次元複素ベクトル空間上の単位ベクトルを表す。この測定によって qubit の状態は壊れ、測定結果に対応した特定の状態に収縮する。

無限回この qubit と同等の qubit の測定を行うことで  $\alpha$  と  $\beta$  を決定することができるが、実際にはこの方法で  $\alpha$  と  $\beta$  を決定することは非常に困難である。

## 1.2 正規直交基底

qubit の状態は 2次元複素ベクトル空間のベクトルを表す。

ベクトル空間において一次独立でかつ、そのベクトル空間の任意のベクトルをその一次結合の形に表すことができるようなベクトルの組のことを基底と言う。qubit ではそれは重ね合わせた状態で表すことができる。そこで、次のような2つの状態の qubit を考える。

$$|\phi_k\rangle = \alpha_k|0\rangle + \beta_k|1\rangle \quad (k = 1, 2) \quad (1.3)$$

ベクトル空間で基底に含まれるどの2つのベクトルの内積も 0 であるときに、その基底を直交基底という。さらにそのすべての基底が長さ 1 に正規化されているとき、この基底を正規直交系という。qubit では次の式が成り立つような  $\{|\phi_n\rangle\}$  を正規直交系という [3][4][5]。

$$\begin{cases} \langle \phi_k | \phi_l \rangle = 0 & (k \neq l) \\ \langle \phi_k | \phi_k \rangle = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

つまり、正規直交基底ならば次の式が成立する。

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (1.5)$$

### 1.3 射影測定

射影とはベクトルなどのある方向成分を取り出す写像のことをいう [3]。この射影について射影演算子は正規直交基底を  $\{|\phi_\alpha\rangle\}$  として、

$$P_\alpha = |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha| \quad (1.6)$$

で書き表される。これらは、

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\alpha \rangle = 1 \quad (1.7)$$

と規格化されている。次のような  $n$  次元空間の量子系の状態があるとする。

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle + \cdots + \alpha_n|\phi_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i|\phi_i\rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

このとき、 $|\phi\rangle$  から、特定の状態を取り出す演算子が射影演算子であり、状態  $i$  を取り出す射影演算子を  $P_i$  とすると、式 (1.4) より

$$\begin{aligned} P_i|\phi\rangle &= |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\sum_j \alpha_j|\phi_j\rangle \\ &= |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\{\alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle + \cdots + \alpha_j|\phi_j\rangle + \cdots + \alpha_n|\phi_n\rangle\} \\ &= |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\alpha_i|\phi_i\rangle = \alpha_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi_i\rangle = \alpha_i|\phi_i\rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

となり、 $|\phi_\alpha\rangle$  から  $|\phi_i\rangle$  が取り出せた。

量子力学では正規直交基底  $\{|\phi_\alpha\rangle\}$  で測定を行うと測定後にその状態が  $|\phi_i\rangle$  に収縮することを意味する。

### 1.4 Bloch 球

式 (1.1) の規格化された qubit の状態はその係数を

$$\alpha = e^{i\psi} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{i\psi} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}$$

とパラメーター表示することで、以下の式に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} |\vec{n}\rangle &= e^{i\psi} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \\ (0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (1.10)$$

式 (1.10) の全体にかかる  $e^{i\psi}$  は物理的に意味がなく、以後  $\psi = 0$  とする。すると、qubit の状態は  $\theta$  と  $\phi$  により 3次元単位球面上の点に対応することになる。

この状態は図 1.1 のような球によって表すことができる。

このような球を Bloch 球と呼び、また、Bloch 球上のベクトルを Bloch ベクトルと呼ぶ。今、Bloch ベクトルを  $\vec{n}$  とすると、この Bloch ベクトル  $\vec{n}$  に対応する qubit の状態が  $|\vec{n}\rangle$  である。

$$|\vec{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (1.11)$$

$|\vec{n}\rangle$  の状態にある qubit がスピンであるならば、Bloch 球でのベクトルの向きがそのスピンの向きを表す。つまり、Bloch 球を用いることによって qubit の状態を視覚化することができるのである。

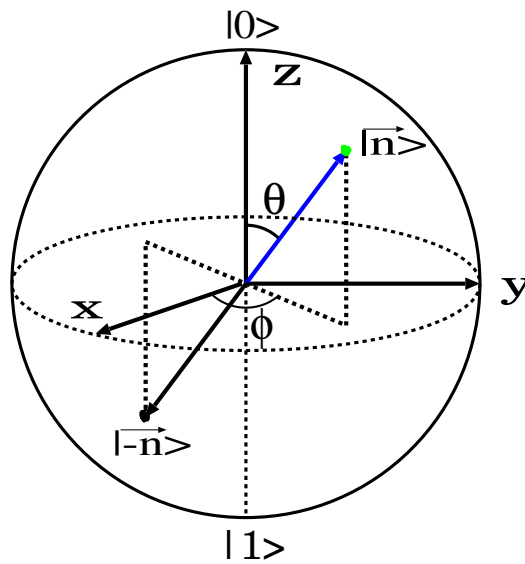


図 1.1: Bloch 球

## 第2章 量子状態推定

### 2.1 量子状態推定と忠実度

今、ある状態が分からない qubit が与えられたとしよう。

その qubit に対して何らかの測定を行い、その測定した結果から与えられた qubit の状態を推定することを量子状態推定という。

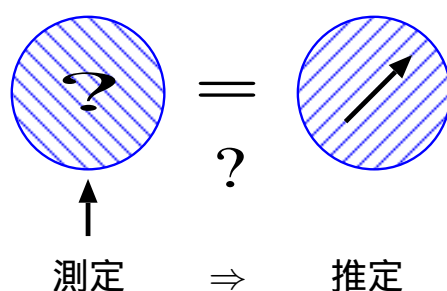


図 2.1: 量子状態推定

しかしながら、qubit は量子力学に従うため測定によって状態は壊れ、測定結果に応じた状態に収縮する。また、測定の結果は確率的に現れる。このことから、量子状態推定において完全な推定をすることは出来ず、また推定の確実さを上げるような自明な答えはないといえる。

では、推定をした状態が一体どれだけもとの qubit の状態に忠実であるか。それを表すのに忠実度 (fidelity) という言葉が用いられ、この研究では次の式に示すように、与えられた状態と測定結果から推定した状態の内積の絶対値の二乗を用いる。

$$F = \left| \left\langle \left( \text{blue circle with diagonal lines and question mark} \right) \left| \left( \text{blue circle with diagonal lines and arrow} \right) \right. \right\rangle \right|^2$$

図 2.2: 忠実度

このとき忠実度は、 $0 \leq F \leq 1$  の範囲での値をとる。もし、完全に忠実であるならば、内積は 1 となり、忠実度 1 を得る。しかし、図 1.1 の  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$ 、 $|\vec{n}\rangle$  と  $|-\vec{n}\rangle$  のように量子力学的に直交している場合にはその内積は 0 となり、忠実度 0 が得られる。

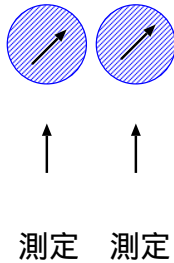
では、状態推定を行うためにはどのような測定を行うとより忠実に推定をすることができるだろうか。

## 2.2 2 qubit の測定方法

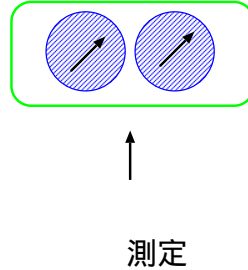
ある同じ状態にある qubit が 2 つ与えられたとすると、この 2-qubit の測定方法には次の 3 種類がある。

- (1) 1 つめの qubit と 2 つめの qubit とを別々に測定
- (2) 与えられた 2 つの qubit を 1 つの系とみなしてその全体を測定
- (3) 与えられた qubit に自分の持っている qubit を補助 qubit として加えて、3 つを 1 つの系とみなして測定

(1) 別々に測定



(2) 1 つの系とみなし測定



(3) 補助 qubit を用いて測定

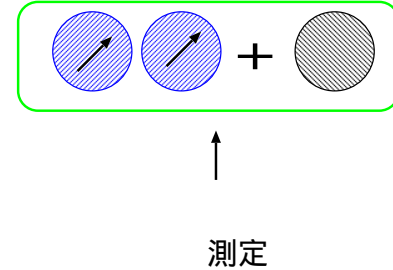


図 2.3: 2 qubit の測定方法

## 2.3 本研究の目的

ある状態がわからない同等の qubit が 2 つ与えられたとき、この測定方法は 2.2 節にあげた 3 種類がある。このうち (1) の別々に測定する場合についての忠実度は、出口智美氏の昨年度卒業研究によって示されている。この結果から、別々に測定を行うよりもその全体を 1 つの系とみなして測定を行った場合の方がより忠実度が上げられるのではないかと、という予想を立てた。この予想の下、(2) の測定を行った場合についての忠実度、さらには (3) の測定方法を用いた場合の忠実度を求め、より忠実に量子状態推定を行う方法を求めることを目的とした。



# 第3章 qubit の測定

この章では出口氏によって求められている、qubit が1つ与えられた場合、2つ与えられた場合の(1)の2つのqubitに別々の測定を行った場合の忠実度の結果から示す[6]。さらに、その(1)を1つめのqubitを測定した結果に応じて2つめのqubitの測定を変えた場合と比較を行う。

## 3.1 1 qubit

ここではまず、qubit が1つ与えられた場合の忠実度について説明する。  
ある状態が分からないqubit

$$|\vec{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (3.1)$$

が与えられたとする。このqubitに対して、正規直交基底  $\{|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle\}$  で測定をするとする。つまり、 $|\vec{m}\rangle$  と  $|-\vec{m}\rangle$  を区別する測定を行う。

このとき、測定結果が  $|\vec{m}\rangle$  である確率を  $P_+$ 、 $|-\vec{m}\rangle$  である確率を  $P_-$  とする。すると測定結果の確率は式 (A.1) を使うと次のように書ける。

$$\begin{cases} P_+ = |\langle \vec{n} | \vec{m} \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}) \\ P_- = |\langle \vec{n} | -\vec{m} \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}) \end{cases} \quad (3.2)$$

測定結果に応じて状態  $|\vec{m}\rangle$  または  $|-\vec{m}\rangle$  にあるqubitを準備する。

測定結果が  $|\vec{m}\rangle$  のときの忠実度を  $F_+$ 、 $|-\vec{m}\rangle$  のときの忠実度を  $F_-$  とすると忠実度は次に示す式となる。

$$\begin{cases} F_+ = |\langle \vec{n} | \vec{m} \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}) \\ F_- = |\langle \vec{n} | -\vec{m} \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}) \end{cases} \quad (3.3)$$

式 (3.2) と式 (3.3) から平均の忠実度  $F$  は

$$\begin{aligned} F &= P_+F_+ + P_-F_- \\ &= \frac{1}{2}\{1 + (\vec{n} \cdot \vec{m})^2\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

と書ける。

ただし、これはある与えられた状態  $|\vec{n}\rangle$  に関するものである。ところが、今、 $|\vec{n}\rangle$  は Bloch 球上のどの点も取ることができる。よって  $|\vec{n}\rangle$  が Bloch 球上で一様に分布していると仮定し、Bloch 球上で平均した忠実度  $\langle F \rangle$  を求める。

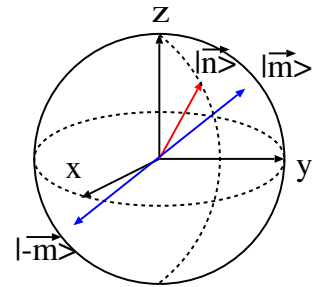


図 3.1: 1 qubit の測定

$$\begin{aligned}
\langle F \rangle &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi} \\
&= \left\langle \frac{1}{2} \{1 + (\vec{n} \cdot \vec{m})^2\} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \{1 + m_x^2 \langle n_x \rangle^2 + m_y^2 \langle n_y \rangle^2 + m_z^2 \langle n_z \rangle^2 \\
&\quad + 2m_x m_y \langle n_x n_y \rangle + 2m_y m_z \langle n_y n_z \rangle + 2m_z m_x \langle n_z n_x \rangle\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) \right\} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

このように Bloch 球上で平均した忠実度は式 (3.5) のように求められ、このとき、忠実度は測定に用いる基底によらないことがわかる。

今、もし与えられた 1-qubit に補助 qubit を加えて測定を行ったとする。その場合の忠実度はまた、 $\frac{2}{3}$  になることがわかっている。

### 3.2 (1) 別々に測定した場合-1

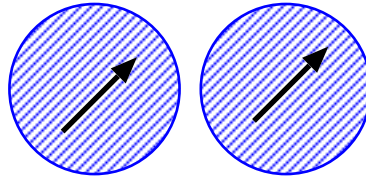


図 3.2: (1) 別々に測定

ある同じ状態にある qubit が 2 つ与えられたとき  $|\phi\rangle = |\vec{n}\rangle |\vec{n}\rangle$ 、正規直交基底

$$\{|s\vec{m}_1\rangle |t\vec{m}_2\rangle\} \quad (s, t = \pm) \tag{3.6}$$

で測定をするとすると、測定結果が得られる確率  $P_{st}$  は

$$\begin{aligned}
P_{st} &= |\langle \vec{n} | s\vec{m}_1 \rangle|^2 |\langle \vec{n} | t\vec{m}_2 \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4} (1 + \vec{n} \cdot s\vec{m}_1) (1 + \vec{n} \cdot t\vec{m}_2)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

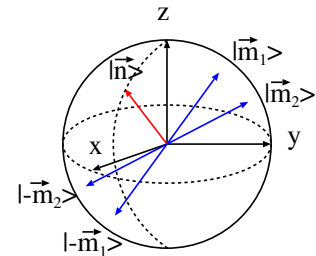


図 3.3: 2 qubit の測定 (1)

と求められる。

この測定結果から推定した状態  $\vec{n}_{st}$  を準備する。すると、この忠実度  $F_{st}$  は

$$F_{st} = |\langle \vec{n} | \vec{n}_{st} \rangle|^2 = \frac{1}{2} (1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{st}) \tag{3.8}$$

である。平均の忠実度  $F_1$  とすると

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{st}^{\pm} P_{st} F_{st} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{st}^{\pm} (1 + \vec{n} \cdot s\vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot t\vec{m}_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{st}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

となり、 $|\vec{n}\rangle$  が Bloch 球上で一様に分布しているとする、

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &= \frac{1}{8} \sum_{st}^{\pm} \langle (1 + \vec{n} \cdot s\vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot t\vec{m}_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{st}) \rangle \\ &= \frac{1}{8} \sum_{st}^{\pm} (1 + \frac{1}{3} \vec{n}_{st} \cdot s\vec{m}_1 + \frac{1}{3} \vec{n}_{st} \cdot t\vec{m}_2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{st}^{\pm} \{ \vec{n}_{st} \cdot (s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2) \} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。

ここで  $|\vec{n}\rangle$  は Bloch 球上で一様に分布していると仮定している、 $\vec{n}_{st}$  は単位ベクトルである。これよりコーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

$$\vec{n} \cdot \vec{a} \leq |\vec{a}| \quad (\vec{n} : \text{単位ベクトル}) \quad (3.11)$$

を式 (3.10) に利用すると

$$\langle F_1 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{st}^{\pm} |s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2| \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{24} \sum_{st}^{\pm} \sqrt{(1 + st\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)} \quad (3.13)$$

となる。これにさらに次の不等式を利用する。

$$\sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}x + 1 \quad (3.14)$$

すると、平均の忠実度は

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &\leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{24} \sum_{st}^{\pm} (\frac{1}{2}st\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned} \quad (3.15)$$

と求められる。

平均の忠実度  $\langle F_1 \rangle$  が最大値をとる場合は式 (3.13) と式 (3.15) が最大になるときである。

式 (3.13) で等号が成立する場合は

$$\vec{n}_{st} = \frac{s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2}{|s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2|} \quad (3.16)$$

のときで、式 (3.15) で等号が成立する場合は

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0 \quad (3.17)$$

となるときである。

つまり、 $\vec{m}_1$  と  $\vec{m}_2$  を直交するように測定を行い、 $\vec{n}_{st}$  を式 (3.16) のようにとったときに最大値をとる。以上より、与えられる qubit  $|\vec{n}\rangle$  が 1 つよりも 2 つの方がより忠実に再現することができる。とわかる。

この出口氏の結果を受けて、1 つめの測定結果に応じて 2 つめの qubit の測定を変えることで自由度が増え、より大きな忠実度が得られるのではないかと、という仮定を立ててその検証を行った。

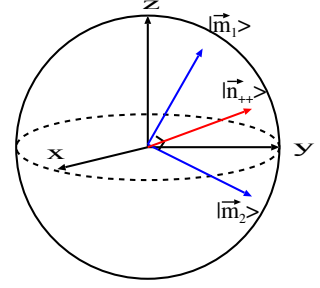


図 3.4:  $\langle F_1 \rangle$  が最大となる測定

### 3.3 (1) 別々に測定した場合-2

今、 $|\phi\rangle = |\vec{n}\rangle|\vec{n}\rangle$  が与えられたとする。これに対して 1 つめの qubit には

$$\{|\vec{m}_1\rangle, |-\vec{m}_1\rangle\} \quad (3.18)$$

で測定を行う。その結果 (+, -) に応じて 2 つめの qubit に対する測定を以下のように変えるとする。

$$\begin{cases} +\text{のとき } |\vec{m}_2\rangle, |-\vec{m}_2\rangle \\ -\text{のとき } |\vec{m}'_2\rangle, |-\vec{m}'_2\rangle \end{cases} \quad (3.19)$$

この測定結果は

$$|\vec{m}_1\rangle|\vec{m}_2\rangle, |\vec{m}_1\rangle|-\vec{m}_2\rangle, |-\vec{m}_1\rangle|\vec{m}'_2\rangle, |-\vec{m}_1\rangle|-\vec{m}'_2\rangle$$

の 4 つである。この測定結果の得られる確率は

$$\begin{cases} P_{++} = |\langle \vec{n} | \vec{m}_1 \rangle|^2 |\langle \vec{n} | \vec{m}_2 \rangle|^2 = \frac{1}{4}(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}_2) \\ P_{+-} = |\langle \vec{n} | \vec{m}_1 \rangle|^2 |\langle \vec{n} | -\vec{m}_2 \rangle|^2 = \frac{1}{4}(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}_2) \\ P_{-+} = |\langle \vec{n} | -\vec{m}_1 \rangle|^2 |\langle \vec{n} | \vec{m}'_2 \rangle|^2 = \frac{1}{4}(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}'_2) \\ P_{--} = |\langle \vec{n} | -\vec{m}_1 \rangle|^2 |\langle \vec{n} | -\vec{m}'_2 \rangle|^2 = \frac{1}{4}(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}'_2) \end{cases} \quad (3.20)$$

である。ここで測定結果から  $\vec{n}_{st}$  を準備するとすると、忠実度  $F'_{st}$  は

$$F'_{st} = |\langle \vec{n} | \vec{n}_{st} \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{st}) \quad (3.21)$$

これより、平均の忠実度  $F'_1$  は

$$\begin{aligned} F'_1 &= \sum_{st}^{\pm} P_{st} F'_{st} \\ &= \frac{1}{8} \{ (1 + \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{++}) \\ &\quad + (1 + \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{+-}) + (1 - \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot \vec{m}'_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{-+}) \\ &\quad + (1 - \vec{n} \cdot \vec{m}_1)(1 - \vec{n} \cdot \vec{m}'_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{--}) \} \quad (3.22) \end{aligned}$$

となり、これを Bloch 球上で平均した忠実度  $\langle F'_1 \rangle$  を求める。

$$\begin{aligned}
\langle F'_1 \rangle &= \frac{1}{8} \langle \{4 + (\vec{n} \cdot \vec{m}_1)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{++}) + (\vec{n} \cdot \vec{m}_2)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{++}) + (\vec{n} \cdot \vec{m}_1)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{+-}) \\
&\quad - (\vec{n} \cdot \vec{m}_2)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{+-}) - (\vec{n} \cdot \vec{m}_1)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{-+}) + (\vec{n} \cdot \vec{m}'_2)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{-+}) \\
&\quad - (\vec{n} \cdot \vec{m}_1)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{--}) - (\vec{n} \cdot \vec{m}'_2)(\vec{n} \cdot \vec{n}_{--})\} \rangle \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} (\vec{n}_{++} \cdot \vec{m}_1 + \vec{n}_{++} \cdot \vec{m}_2 + \vec{n}_{+-} \cdot \vec{m}_1 - \vec{n}_{+-} \cdot \vec{m}_2 \\
&\quad - \vec{n}_{-+} \cdot \vec{m}_1 + \vec{n}_{-+} \cdot \vec{m}'_2 - \vec{n}_{--} \cdot \vec{m}_1 - \vec{n}_{--} \cdot \vec{m}'_2) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

ここで

$$\vec{A}_{st} = s\vec{m}_1 + \begin{cases} t\vec{m}_2 & s = + \\ t\vec{m}'_2 & s = - \end{cases} \quad (3.24)$$

とすると、 $\vec{A}_{st}$  は次のように書ける。

$$\vec{A}_{st} = s\vec{m}_1 + t(\delta_{s,+}\vec{m}_2 + \delta_{s,-}\vec{m}'_2) \quad (3.25)$$

これより、忠実度  $\langle F'_1 \rangle$  は

$$\langle F'_1 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{st}^{\pm} \vec{A}_{st} \cdot \vec{n}_{st} \quad (3.26)$$

これにシュワルツの不等式 (式 (3.11)) を用いると

$$\langle F'_1 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{st}^{\pm} |\vec{A}_{st}| \quad (3.27)$$

となる。このとき、 $|\vec{A}_{st}|$  は

$$\begin{aligned}
|\vec{A}_{st}| &= \sqrt{(\vec{A}_{st})^2} = \sqrt{\{s\vec{m}_1 + t(\delta_{s,+}\vec{m}_2 + \delta_{s,-}\vec{m}'_2)\}^2} \\
&= \sqrt{2 + 2st\vec{m}_1 \cdot (\delta_{s,+}\vec{m}_2 + \delta_{s,-}\vec{m}'_2)} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

となるのでこのとき忠実度  $\langle F'_1 \rangle$  は

$$\langle F'_1 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{24} \sum_{st}^{\pm} \sqrt{1 + st\vec{m}_1 \cdot (\delta_{s,+}\vec{m}_2 + \delta_{s,-}\vec{m}'_2)} \quad (3.29)$$

である。ここで、不等式 (3.14) より

$$\begin{aligned}
\langle F'_1 \rangle &\leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{24} \sum_{st}^{\pm} \{1 + \frac{1}{2}st\vec{m}_1 \cdot (\delta_{s,+}\vec{m}_2 + \delta_{s,-}\vec{m}'_2)\} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot 4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

と求められた。この結果から、

$$\begin{cases} \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0 \text{ かつ } \vec{m}_1 \cdot \vec{m}'_2 = 0 \\ \vec{n}_{st} = \frac{\vec{A}_{st}}{|\vec{A}_{st}|} \end{cases} \quad (3.31)$$

のときに最大値をとる。つまり、1 つめの qubit を測定するのに用いる基底に直交するようにして 2 つめの qubit の測定を行う基底を決定すれば、Bloch 球上であればどの方向を向いていても最大値に式 (3.30) をとる。また、 $\vec{m}_2 = \vec{m}'_2$  のときに、3.2 で求めた結果に一致する。

## 第4章 補助 qubit

qubit が 2 つ与えられたときの測定方法 (2)2 つを 1 つの系とみなした場合、(3) 補助 qubit を用いた場合の測定での状態推定をしたときの忠実度を求める。

### 4.1 (2)2 つの qubit を 1 つの系とみなした場合

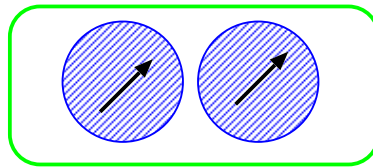


図 4.1: (2)2 つの qubit を 1 つの系とみなした場合

#### 4.1.1 一般式

与えられた 2 つの qubit の状態  $|\phi\rangle = |\vec{n}\rangle|\vec{n}\rangle$  を 1 つの系とみなして測定した場合を考える。ここではまず、忠実度  $\langle F \rangle$  を与える一般式を求める。

$|\phi\rangle$  に対して正規直交基底の  $\{|\phi_\alpha\rangle\}$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) で測定を行い、測定結果の確率を  $P_\alpha$ 、測定結果に応じて推定した状態を  $|\vec{n}_\alpha\rangle$  とすると

$$\begin{cases} P_\alpha = |\langle \phi | \phi_\alpha \rangle|^2 \\ F_\alpha = |\langle \vec{n} | \vec{n}_\alpha \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_\alpha) \end{cases} \quad (4.1)$$

これより忠実度は

$$F = \sum_{\alpha=1}^4 P_\alpha F_\alpha \quad (4.2)$$

となり、これを Bloch 球上で平均した忠実度は

$$\langle F_2 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha=1}^4 (1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_\alpha) |\langle \phi | \phi_\alpha \rangle|^2 \right\rangle \quad (4.3)$$

である。ここで、複素数で

$$|z|^2 = z\bar{z} = \bar{z}z \quad (4.4)$$

という式が成り立った。これより、確率  $P_\alpha$  は

$$\begin{aligned} P_\alpha &= |\langle \phi | \phi_\alpha \rangle|^2 = \langle \phi | \phi_\alpha \rangle \langle \phi_\alpha | \phi \rangle \\ &= \langle \phi_\alpha | \vec{n} \rangle | \vec{n} \rangle \langle \vec{n} | \langle \vec{n} | \phi_\alpha \rangle \\ &= \langle \phi_\alpha | (| \vec{n} \rangle \langle \vec{n} |) (| \vec{n} \rangle \langle \vec{n} |) | \phi_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

と書ける。ここで、 $| \vec{n} \rangle \langle \vec{n} |$  において式 (C.1) より次の式が成り立つ。

$$| \vec{n} \rangle \langle \vec{n} | = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (4.6)$$

与えられた qubit の 1 つめと 2 つめを区別して、これを使うと忠実度  $\langle F_2 \rangle$  は

$$\begin{aligned} \langle F_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha=1}^4 (1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_\alpha) \left( \langle \phi_\alpha | \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}(1)) \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{8} \left\langle \sum_{\alpha=1}^4 \langle \phi_\alpha | (1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_\alpha) (1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}(1)) (1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle \right\rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

となり、これを  $\vec{n}$  について平均をとると

$$\begin{aligned} \langle F_2 \rangle &= \frac{1}{8} \sum_{\alpha=1}^4 \langle \phi_\alpha | 1 + \frac{1}{3} \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2) + \frac{1}{3} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{\sigma}(1) + \frac{1}{3} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{\sigma}(2) | \phi_\alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^4 \langle \phi_\alpha | \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2) + \vec{n}_\alpha \cdot (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。

ここで、式 (4.8) においてブラケット記号の中を 1 項めと 2 項めをわけ、それぞれについて計算をする。

演算子のトレース

$$\text{Tr} A = \sum_{\alpha=1}^n \langle \phi_\alpha | A | \phi_\alpha \rangle = \sum_{\alpha'}^n \langle \phi_{\alpha'} | A | \phi_{\alpha'} \rangle \quad (4.9)$$

より [3]、第 1 項について  $| \phi_\alpha \rangle$  に

$$| \phi_\alpha \rangle = | 00 \rangle, | 01 \rangle, | 10 \rangle, | 11 \rangle \quad (4.10)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^4 \{ \langle \phi_\alpha | \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2) | \phi_\alpha \rangle \} &= \sum_{i=1}^3 \{ \langle 00 | \sigma_i(1) \cdot \sigma_i(2) | 00 \rangle + \langle 01 | \sigma_i(1) \cdot \sigma_i(2) | 01 \rangle \\ &\quad + \langle 10 | \sigma_i(1) \cdot \sigma_i(2) | 10 \rangle + \langle 11 | \sigma_i(1) \cdot \sigma_i(2) | 11 \rangle \} \end{aligned}$$

ここで、

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

より、

$$\sum_{\alpha=1}^4 \langle \phi_\alpha | \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2) | \phi_\alpha \rangle = 0 \quad (4.12)$$

となる。

次に第2項について、シュワルツの不等式 (3.11) より、

$$\sum_{\alpha=1}^4 \vec{n}_\alpha \cdot \langle \phi_\alpha | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle \leq \sum_{\alpha=1}^4 |\langle \phi_\alpha | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle| \quad (4.13)$$

となる。

式 (4.12) と式 (4.13) より、

$$\langle F_2 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^4 \langle \phi_\alpha | \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2) + \vec{n}_\alpha \cdot (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle \quad (4.14)$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^4 |\langle \phi_\alpha | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle| \quad (4.15)$$

となり、 $\langle F_2 \rangle$  の一般式が求められた。

次に、この一般式の検証を行う。ある同じ状態にある qubit が2つ与えられた場合の測定方法、(1) 別々に測定を行った場合は (2) 1つの系とみなした場合に含まれる。そこで、(1) の測定を行うのに用いた正規直交基底  $|s\vec{m}_1\rangle |t\vec{m}_2\rangle$  を式 (4.15) に代入して確かめる。

まず、 $st = ++$  のときを  $|\phi_1\rangle = |\vec{m}_1\rangle |\vec{m}_2\rangle$  として絶対値の部分を計算する。

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1 | (\sigma_x(1) + \sigma_x(2)) | \phi_1 \rangle \\ &= \langle \vec{m}_1 | \sigma_x(1) | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \vec{m}_2 \rangle + \langle \vec{m}_1 | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(2) | \vec{m}_2 \rangle \\ &= m_{1x} + m_{2x} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となるので、

$$\begin{aligned} & |\langle \phi_1 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_1 \rangle| \\ &= \sqrt{(m_{1x} + m_{2x})^2 + (m_{1y} + m_{2y})^2 + (m_{1z} + m_{2z})^2} \\ &= |\vec{m}_1 + \vec{m}_2| \end{aligned} \quad (4.17)$$

と求められる。同様にして  $st = +-、-+、--$  についても求められるので

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \{ |\vec{m}_1 + \vec{m}_2| + |\vec{m}_1 - \vec{m}_2| + |-\vec{m}_1 + \vec{m}_2| + |-\vec{m}_1 - \vec{m}_2| \} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{st}^{\pm} |s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2| \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。これは、3.2節の式 (3.12) に等しい。よってこの一般式は正しいといえる。

では、この式 (4.15) から (2) 2 qubit を1つの系とみなしたときの忠実度を求める。

## 4.1.2 ベル基底

4.1.1 で求めた  $\langle F_2 \rangle$  に 2 qubit の正規直交基底としてベル基底を代入する。

ベル基底

$$\begin{cases} |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\vec{m}_1\rangle |\vec{m}_2\rangle + |-\vec{m}_1\rangle |-\vec{m}_2\rangle) \\ |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\vec{m}_1\rangle |-\vec{m}_2\rangle + |-\vec{m}_1\rangle |\vec{m}_2\rangle) \\ |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\vec{m}_1\rangle |-\vec{m}_2\rangle - |-\vec{m}_1\rangle |\vec{m}_2\rangle) \\ |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\vec{m}_1\rangle |\vec{m}_2\rangle - |-\vec{m}_1\rangle |-\vec{m}_2\rangle) \end{cases} \quad (4.19)$$



$|\phi_1\rangle$  について、式 (4.15) の絶対値の中の各成分ごとの計算をする。

まず  $x$  成分について

$$\begin{aligned}
& \langle \phi_1 | \sigma_x(1) + \sigma_x(2) | \phi_1 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \langle \vec{m}_1 | \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(1) + \sigma_x(2) | \vec{m}_1 \rangle | \vec{m}_2 \rangle + \langle \vec{m}_1 | \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(1) + \sigma_x(2) | -\vec{m}_1 \rangle | -\vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle -\vec{m}_1 | \langle -\vec{m}_2 | \sigma_x(1) + \sigma_x(2) | \vec{m}_1 \rangle | \vec{m}_2 \rangle + \langle -\vec{m}_1 | \langle -\vec{m}_2 | \sigma_x(1) + \sigma_x(2) | -\vec{m}_1 \rangle | -\vec{m}_2 \rangle \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \langle \vec{m}_1 | \sigma_x(1) | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \vec{m}_2 \rangle + \langle \vec{m}_1 | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(2) | \vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle \vec{m}_1 | \sigma_x(1) | -\vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | \vec{m}_2 \rangle + \langle \vec{m}_1 | -\vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | \sigma_x(2) | \vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle -\vec{m}_1 | \sigma_x(1) | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | -\vec{m}_2 \rangle + \langle -\vec{m}_1 | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(2) | -\vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle -\vec{m}_1 | \sigma_x(1) | -\vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | -\vec{m}_2 \rangle + \langle -\vec{m}_1 | -\vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | \sigma_x(2) | -\vec{m}_2 \rangle \} \\
&= m_{1x} + m_{2x} - m_{1x} - m_{2x} = 0
\end{aligned}$$

$y$  成分、 $z$  成分についても同様に 0 になる。

ここで、式 (D.1)

$$\langle \vec{n} | \sigma_i | \vec{n} \rangle = n_i$$

を使った。

$|\phi_2\rangle$  について同様に計算すると

$$\begin{aligned}
& \langle \phi_2 | \sigma_x(1) + \sigma_x(2) | \phi_2 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \langle \vec{m}_1 | \sigma_x(1) | \vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | -\vec{m}_2 \rangle + \langle \vec{m}_1 | \vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | \sigma_x(2) | -\vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle \vec{m}_1 | \sigma_x(1) | -\vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | \vec{m}_2 \rangle + \langle \vec{m}_1 | -\vec{m}_1 \rangle \langle -\vec{m}_2 | \sigma_x(2) | \vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle -\vec{m}_1 | \sigma_x(1) | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | -\vec{m}_2 \rangle + \langle -\vec{m}_1 | \vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(2) | -\vec{m}_2 \rangle \\
&\quad + \langle -\vec{m}_1 | \sigma_x(1) | -\vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \vec{m}_2 \rangle + \langle -\vec{m}_1 | -\vec{m}_1 \rangle \langle \vec{m}_2 | \sigma_x(2) | \vec{m}_2 \rangle \} \\
&= m_{1x} - m_{2x} - m_{1x} + m_{2x} = 0
\end{aligned}$$

$y$  成分、 $z$  成分についてもまた、同様に 0 となる。

また、 $|\phi_3\rangle$ 、 $|\phi_4\rangle$  は、 $|\phi_1\rangle$ 、 $|\phi_2\rangle$  のたすきがけの項の符号が変わるだけなので、同様に 0。

以上より測定にベル基底を用いた場合の平均の忠実度は

$$\langle F_2 \rangle = \frac{1}{2} \quad (4.20)$$

と求められた。しかし、この値は式 (4.15) より、取りうる最も小さな値である。

そこで、さらに大きな値の忠実度を求めるために、補助 qubit を用いた。

## 4.2 (3) 補助 qubit を用いた場合

測定を行うときに与えられた qubit の他に自分で qubit を準備し、これを加えて測定を行う。この後から加える qubit を補助 qubit と呼ぶ。

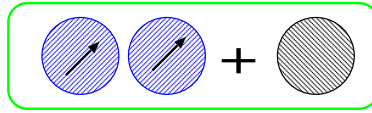


図 4.2: (3) 補助 qubit を用いた場合

今、同じ状態にある qubit が 2 つ与えられている。

補助 qubit を用いることにより、測定に用いる正規直交基底の 1 つめ、2 つめの qubit の方向を揃えることが出来る。これによりより大きな忠実度を得られることが期待される。

今、与えられた qubit ( $|\vec{n}\rangle|\vec{n}\rangle$ ) に、補助 qubit として  $|0\rangle$  を加えて  $|\phi\rangle = |\vec{n}\rangle|\vec{n}\rangle|0\rangle$  として測定を行うものとする。

このとき、平均の忠実度  $\langle F_3 \rangle$  は、測定に用いる正規直交基底を  $\{\phi_{\alpha'}\}$  ( $\alpha' = 1, 2, \dots, 8$ ) とすると

$$\langle F_3 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha'=1}^8 |\langle \phi_{\alpha'} | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0| \phi_{\alpha'} \rangle| \quad (4.21)$$

となる。

測定に用いる正規直交基底  $\{|\phi_{\alpha'}\rangle\}$  を次のように準備した。

$$|\phi_{\alpha'}\rangle = \begin{cases} |\phi_1\rangle = |e_x\rangle|e_x\rangle|e_x\rangle \\ |\phi_2\rangle = |-e_x\rangle|-e_x\rangle|e_x\rangle \\ |\phi_3\rangle = |e_z\rangle|e_z\rangle|-e_x\rangle \\ |\phi_4\rangle = |-e_z\rangle|-e_z\rangle|-e_x\rangle \\ |\phi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle|e_y\rangle|e_z\rangle + |-e_y\rangle|-e_y\rangle|-e_z\rangle) \\ |\phi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-e_y\rangle|-e_y\rangle|e_z\rangle + |e_y\rangle|e_y\rangle|-e_z\rangle) \\ |\phi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle|-e_y\rangle|e_z\rangle - |-e_y\rangle|e_y\rangle|e_z\rangle) \\ |\phi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle|-e_y\rangle|-e_z\rangle - |-e_y\rangle|e_y\rangle|-e_z\rangle) \end{cases} \quad (4.22)$$

この正規直交基底は以下のようにして決定した。

1 つめと 2 つめの qubit の方向が揃うようにして  $|\phi_1\rangle$  を準備し、次に 1 つめと 2 つめの qubit の方向が揃うようにしてかつ  $|\phi_1\rangle$  に直交するように  $|\phi_2\rangle$  を決めた。次に  $|\phi_3\rangle$ 、 $|\phi_4\rangle$  もまた同様にして準備。 $|\phi_1\rangle$ 、 $|\phi_2\rangle$  と  $|\phi_3\rangle$ 、 $|\phi_4\rangle$  は 3 つめの qubit で直交するように決定した。しかし、この方法では基底の残りを決定することは出来なかった。そこで、同様にして準備した以下のベクトルを組み合わせることにより  $|\phi_1\rangle \sim |\phi_4\rangle$  と直交するような  $|\phi_5\rangle$ 、 $|\phi_6\rangle$  を決定した。

$$\begin{cases} |e_y\rangle|e_y\rangle|e_x\rangle \\ |-e_y\rangle|-e_y\rangle|e_x\rangle \\ |e_y\rangle|e_y\rangle|-e_x\rangle \\ |-e_y\rangle|-e_y\rangle|-e_x\rangle \end{cases} \quad (4.23)$$

だが、ここで  $|\phi_5\rangle$ 、 $|\phi_6\rangle$  を決定した方法では  $|\phi_7\rangle$ 、 $|\phi_8\rangle$  は決定できなかった。そこで反対称となるように作ることで  $|\phi_1\rangle \sim |\phi_6\rangle$  と直交するように  $|\phi_7\rangle$ 、 $|\phi_8\rangle$  を決定した。

以上のようにして準備した正規直交基底で測定を行った場合の Bloch 球上で平均した忠実度を求める。

ここで、

$$\begin{cases} |e_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |-e_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{cases} \quad \begin{cases} |e_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \\ |-e_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) \end{cases} \quad \begin{cases} |e_z\rangle = |0\rangle \\ |-e_z\rangle = |1\rangle \end{cases} \quad (4.24)$$

であるから、 $|\phi_1\rangle$  から順に式 (4.21) の絶対値の中の計算をする。 $x$  成分について求めると

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 | (\sigma_x(1) + \sigma_x(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_1 \rangle &= \langle e_x | \sigma_x(1) | e_x \rangle \langle e_x | e_x \rangle \langle e_x | 0 \rangle \langle 0 | e_x \rangle \\ &\quad + \langle e_x | e_x \rangle \langle e_x | \sigma_x(2) | e_x \rangle \langle e_x | 0 \rangle \langle 0 | e_x \rangle \\ &= (e_x)_x \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot (e_x)_x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

となる。しかし  $y$ 、 $z$  成分については直交するため 0 になる。これより

$$|\langle \phi_1 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_1 \rangle| = 1 \quad (4.25)$$

同様にして

$$\begin{cases} |\langle \phi_2 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_2 \rangle| = |-(e_x)_x \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \{-(e_x)_x\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}| = 1 \\ |\langle \phi_3 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_3 \rangle| = |(e_z)_z \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot (e_z)_z \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}| = 1 \\ |\langle \phi_4 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_4 \rangle| = |-(e_z)_z \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \{-(e_z)_z\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}| = 1 \\ |\langle \phi_5 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_5 \rangle| = |(e_y)_y \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (e_y)_y \cdot 1 \cdot 1| = 1 \\ |\langle \phi_6 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_6 \rangle| = |-(e_y)_y \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot \{-(e_y)_y\} \cdot 1 \cdot 1| = 1 \\ |\langle \phi_7 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_7 \rangle| = |((e_y)_y \cdot 1 + 1 \cdot \{-(e_y)_y\}) + \{-(e_y)_y\} \cdot 1 + 1 \cdot (e_y)_y \cdot 1| = 0 \\ |\langle \phi_8 | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_8 \rangle| = |((e_y)_y \cdot 1 + 1 \cdot \{-(e_y)_y\}) + \{-(e_y)_y\} \cdot 1 + 1 \cdot (e_y)_y \cdot 0| = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

以上より

$$\begin{aligned} \langle F_3 \rangle &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha'=1}^8 |\langle \phi_{\alpha'} | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0 | \phi_{\alpha'} \rangle| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \cdot 6 = \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (4.27)$$

この  $\langle F_3 \rangle$  と 3.2 節で求めた別々に測定した場合の忠実度  $\langle F_1 \rangle$  と比較すると、

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ &= 0.7357 \dots \doteq 0.74 \\ \langle F_3 \rangle &= \frac{3}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

となるので、

$$\therefore \langle F_1 \rangle < \langle F_3 \rangle$$

以上より、補助 qubit を用いることでより大きな忠実度が得られた。

# 第5章 まとめ

## 5.1 本研究のまとめ

本研究では、ある状態がわからない qubit が与えられたときに、その状態を推定し、それがどれだけもとの qubit の状態に忠実であるかを議論した。

特に、qubit が2つ与えられた場合に、その測定方法を変えることでどれだけ忠実に状態推定ができるのかを求めた。その足がかりとして、昨年度の出口智美氏の卒業研究から得られた以下の結果に基づき比較を行った。ある状態がわからない qubit が1つ与えられた場合に状態推定を行ったときの忠実度は

$$\langle F \rangle = \frac{2}{3} \quad (5.1)$$

であった。そして、ある同じ状態にある qubit が2つ与えられた場合に状態を推定した忠実度は以下ようになった。

(1) 別々に測定

このときの忠実度  $\langle F_1 \rangle$  は

$$\langle F_1 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (5.2)$$

である。以下の条件によって最大値をとる。

$$\begin{cases} \vec{n}_{st} = \frac{s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2}{|s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2|} \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

以上の出口氏の結果を下に、以下の場合の状態推定による忠実度を求め、比較した。そこでまずはじめに、(1)'として(1)別々に測定を行った場合に、1つめの測定結果によって2つめの測定する基底を変える場合を考えた。しかし、この場合にその最大値は(1)の値を越えなかった。

(2)1つの系とみなした場合

与えられた qubit を別々に見るよりも、全体を1つの系とみなした場合の方がより大きな値が得られるのではないかと、という予想の下でその忠実度を求めた。

まずその  $\langle F_2 \rangle$  を求める一般式から考えた。

$$\langle F_2 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^4 |\langle \phi_\alpha | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) | \phi_\alpha \rangle| \quad (5.4)$$

(2)は(1)の場合をも含むので、この式について(1)の正規直交基底を用いた場合に  $\langle F_1 \rangle$  の値を満足するか調べた。するとこの値を満足し、 $\langle F_2 \rangle$  を求める一般式は正しいことが示された。

しかしながら、 $\langle F_1 \rangle$  よりも大きな値の忠実度は得られるような正規直交基底がみつからなかった。

### (3) 補助 qubit を用いた場合

ここでは、与えられた qubit に自分の持っていた qubit を補助 qubit として加えて測定した場合を考えた。

ここで求めた忠実度は

$$\langle F_3 \rangle = \frac{3}{4} \quad (5.5)$$

となった。この値は  $\langle F_1 \rangle$  忠実度よりもほんのわずかであるが上回る形となった。

この結果から、別々に測定を行うよりも補助 qubit を用いた測定を行うことでより大きな忠実度が得られた。このことから、補助 qubit の有用性がわかった。だが、まだ  $\langle F_3 \rangle = \frac{3}{4}$  を越えるような測定を行うことはできると考えられる。それは、まず  $\langle F_3 \rangle$  を求めるために用意した正規直交基底  $|\phi_{\alpha'}\rangle$  について  $|\phi_7\rangle$  や  $|\phi_8\rangle$  を  $|\phi_1\rangle \sim |\phi_6\rangle$  と直交するようには準備できたが、1 つめ、2 つめの方向を揃えて作ることができなかった。その結果、式 (4.21) の絶対値部分の計算結果が 0 となった。これを改善することにより、より大きな忠実度を得ることは可能であると考えられる。

また、本研究を進めるにあたって、当初の目的であった (2) の測定を行い状態推定した場合の忠実度が (1) のときの忠実度を越えるような測定を見つけることはできなかった。しかし、そのような測定方法が存在しないという証明も存在せず、これは未解決の問題である。本研究では 2 qubit が与えられた場合についてのみ議論したが、はじめに与えられる qubit をさらに増やした場合の忠実度を求めることも今後の課題といえる。

# 参考文献

- [1] 量子コンピュータ 超並列計算のからくり  
竹内繁樹 著 講談社ブルーバックス (2005)
- [2] 量子情報理論  
佐川弘幸・吉田宣章 共著 シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003)
- [3] 量子力学概論  
W. グライナー 著/伊藤伸泰・早野龍五 監訳/川島直輝・河原林透・  
野々村禎彦・羽田野直道・古川信夫 訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 (2000)
- [4] 量子論  
小出昭一郎 著 裳華房 (1968)
- [5] 量子力学 I  
小出昭一郎 著 裳華房 (1969)
- [6] エンタングルメントを使わない量子テレポーテーション  
出口智美 著 福井大学工学部物理工学科 卒業研究 (2007)

# 謝辞

本論文を作成するにあたり林明久先生には終始変わらぬ親切丁寧なご指導賜りましたことに心より感謝し、御礼申し上げます。

また、鈴木敏男先生、田嶋直樹先生にも本研究活動に対して並々ならぬご指導、ご意見を賜り、さらには研究室では石田陽介先輩、三和之浩先輩、山田昌平先輩にもご指導、ご意見を頂きましたことを厚く御礼申し上げます。

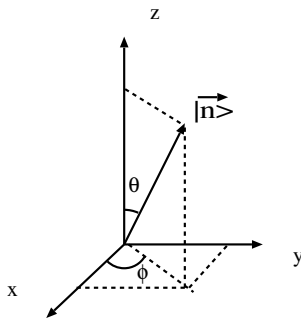
本論文及び研究活動に対してご指導、ご意見を頂いた物理工学科の多くの諸先生方にも心より御礼申し上げ、謝辞の言葉とさせていただきます。

# 付録A qubitの内積公式

qubitの状態は2次元の複素ベクトル空間で表される。

今、図のような単位ベクトル空間上を指すベクトル  $\vec{n}$ 、 $\vec{n}'$  と、2つの qubit の状態  $|\vec{n}\rangle$ 、 $|\vec{n}'\rangle$  との間に次の式が成り立つことを示す。ただし、 $|\vec{n}\rangle$  と  $|\vec{n}'\rangle$  は正規直交基底を構成しているわけではない。

$$\frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}') = |\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle|^2 \tag{A.1}$$



今、2つの3次元実単位ベクトルを

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (n_x, n_y, n_z) \\ &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \vec{n}' &= (n'_x, n'_y, n'_z) \\ &= (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') \end{aligned}$$

とすると、式 (A.1) の左辺は次のようになる。

$$\frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}') = \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta') \tag{A.2}$$

次に、 $|\vec{n}\rangle$  と  $|\vec{n}'\rangle$  は以下の式で表される。

$$|\vec{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \tag{A.3}$$

$$|\vec{n}'\rangle = \cos \frac{\theta'}{2} |0\rangle + e^{i\phi'} \sin \frac{\theta'}{2} |1\rangle \tag{A.4}$$

これより式 (A.1) の右辺を計算する。

$$\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + e^{i(\phi - \phi')} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \tag{A.5}$$

であるから

$$\begin{aligned} |\langle \vec{n} | \vec{n}' \rangle|^2 &= |\{ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \cos(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \\ &\quad + i \sin(\phi - \phi') \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta') \end{aligned} \tag{A.6}$$

となる。以上より、式 (A.1) が成立することがわかる。



# 付録B Bloch球上で平均した各成分の平均

$|\vec{n}\rangle$  が Bloch 球上で一様に分布しているときの忠実度  $\langle F \rangle$  についての平均は以下ようになる。

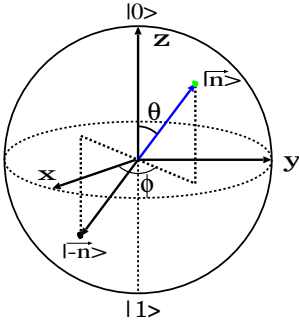


図 B.1: Bloch 球

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

この式に次の各成分を代入する。

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \langle n_x \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_x \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\langle n_y \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_y \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\langle n_z \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_z \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (\text{B.4})$$

以上から各成分について、次が成立することがわかる。

$$\langle n_i \rangle = 0 \quad (\text{B.5})$$

$\langle F \rangle$  が、2成分、3成分のときはそれぞれ計算すると次のようになる。

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

$$\langle n_i n_j n_k \rangle = 0 \quad (\text{B.7})$$

式 (B.6) から、次の式を導くことができる。

$$\begin{aligned} \langle (\vec{n} \cdot \vec{m})(\vec{n} \cdot \vec{m}') \rangle &= \left\langle \sum_i n_i m_i \sum_j n_j m'_j \right\rangle = \sum_{ij} m_i m'_j \langle n_i n_j \rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{ij} m_i m'_j \delta_{ij} = \frac{1}{3} \sum_i m_i m'_i \\ &= \frac{1}{3} (\vec{m} \cdot \vec{m}') \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

## 付録C 演算子-1

演算子  $|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}|$  について、次の式が成り立つことを示す。

$$|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (\text{C.1})$$

ここで、 $|\vec{n}\rangle$ 、 $\langle\vec{n}|$  はそれぞれ次のように表される。

$$|\vec{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (\text{C.2})$$

$$\langle\vec{n}| = \cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 1| \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} |\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| &= (\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle)(\cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 1|) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\sin\theta(e^{-i\phi}|0\rangle\langle 1| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 0|) + \sin^2\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

ここで

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

であり、また式 (4.11) より

$$\begin{aligned} \text{式 (C.4)} &= \cos^2\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin\theta \left\{ e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{i\phi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \sin^2\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & \cos\phi \\ \cos\phi & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -i\sin\phi \\ i\sin\phi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sin\theta\cos\phi\sigma_x + \sin\theta\sin\phi\sigma_y + \cos\theta\sigma_z) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$  より

$$\begin{aligned} |\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| &= \frac{1}{2}(1 + n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

## 付録D 演算子-2

次の式が成り立つことを示す。

$$\langle \vec{n} | \sigma_i | \vec{n} \rangle = n_i \quad (\text{D.1})$$

ここで、完全性より

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \quad (\text{D.2})$$

である。式 (D.1) の左辺は

$$\begin{aligned} \langle \vec{n} | \sigma_i | \vec{n} \rangle &= \langle \vec{n} | 1 \cdot \sigma_i | \vec{n} \rangle \\ &= \sum_i \langle \vec{n} | i \rangle \langle i | \sigma_i | \vec{n} \rangle \\ &= \sum_i \langle i | \sigma_i | \vec{n} \rangle \langle \vec{n} | i \rangle \\ &= \text{Tr} \sigma_i | \vec{n} \rangle \langle \vec{n} | \\ &= \text{Tr} \sigma_i \cdot \frac{1}{2} (1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr} \sigma_i + \text{Tr} \sigma_i (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

ここで式 (B.5) と式 (B.6) より

$$\begin{cases} \text{Tr} \sigma_i = 0 \\ \text{Tr} \sigma_i \sigma_j = 2\delta_{ij} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

である。

$$\therefore \langle \vec{n} | \sigma_i | \vec{n} \rangle = \frac{1}{2} \cdot 2n_i = n_i \quad (\text{D.5})$$