

卒業論文発表会

1月30日, 2008, 福井大学工学部物理工学科

補助 qubit を使った 量子状態推定

物理工学科 國安 京

量子情報

古典的情報...bit ; 「0」か「1」

量子情報...qubit(量子ビット) ; 「0」か「1」か「0と1の重ね合わせ状態」

⇒ 並列計算の実現、暗号理論への応用など

qubit

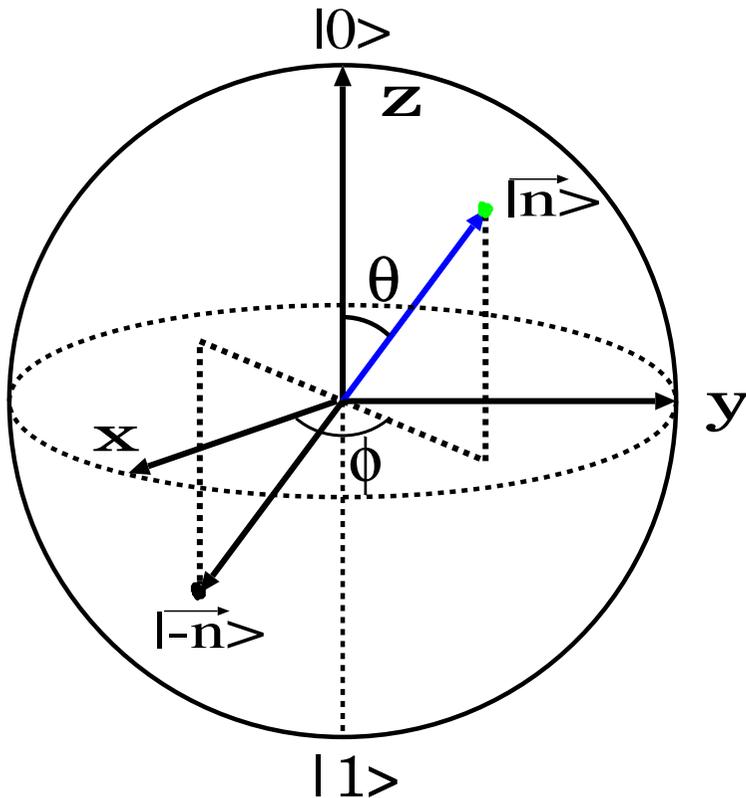
・ 最も簡単な量子系

qubitの2つの状態を $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ とする

重ね合わせの状態

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

Bloch 球



$\alpha = \cos \frac{\theta}{2}$ 、 $\beta = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}$ とすると、規格化された qubit の状態は次の式で与えられる

$$|\vec{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$

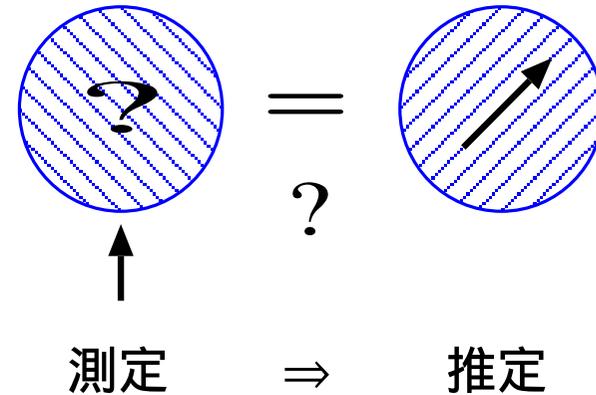
- θ と ϕ は左図のような 3次元単位球上の点を定義
- Bloch ベクトル ; \vec{n}
- Bloch 球を利用することで、qubit の状態を視覚化できる

量子状態推定

ある状態が分からないqubitに何らかの測定をし、その結果から状態を推定すること

測定により対象の状態は壊れ、結果は確率的

⇒ 完全な推定はできず、推定の確実さを上げる自明な答えはない



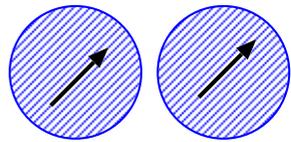
忠実度

量子状態推定で推定した状態が、どれだけもとの知りたい状態のqubitに忠実であるか、忠実度 (fidelity) を用いて表す

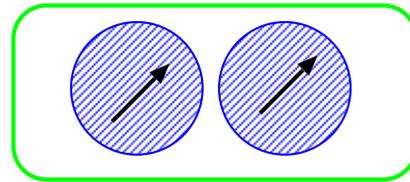
$$F = \left| \left\langle \text{circle with question mark} \mid \text{circle with arrow} \right\rangle \right|^2$$

qubitの測定方法

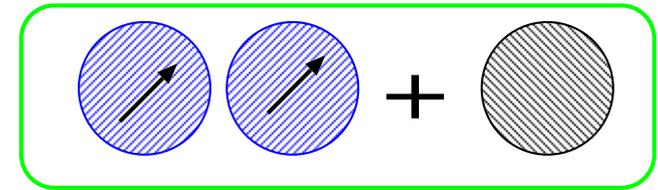
ある同じ状態にある qubit が2つ与えられた場合の qubit の測定方法は次の3種類



(1) 別々に測定



(2) 1つの系とみなし測定



(3) 補助 qubit を用いて測定

出口智美氏の昨年度卒業研究により別々に測定する場合の忠実度は求められている

⇒(2) や (3) の場合の忠実度

(1) 別々に測定

ある同じ状態にある qubit が2つ与えられたとき

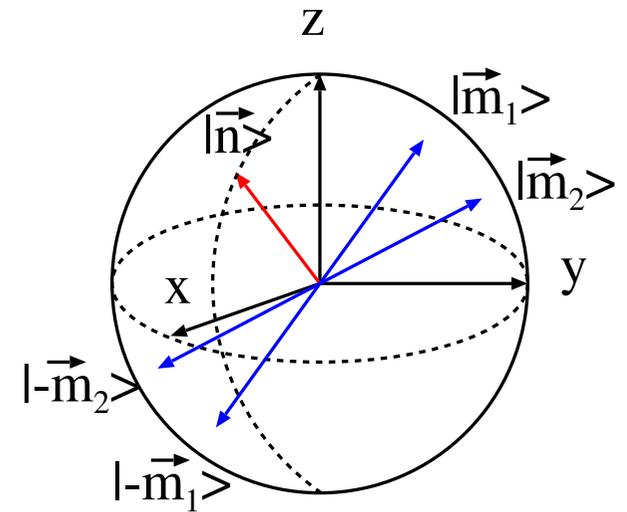
$$(|\phi\rangle = |\vec{n}\rangle|\vec{n}\rangle)$$

- 正規直交基底 $\{|s\vec{m}_1\rangle|t\vec{m}_2\rangle\}$ ($s, t = \pm$) で測定
- 推定した状態 $|\vec{n}_{st}\rangle$
- 測定結果が得られる確率 P_{st}

$$F_1 = \sum_{st}^{\pm} P_{st} |\langle \vec{n} | \vec{n}_{st} \rangle|^2$$

\vec{n} が Bloch 球上で一様に分布しているとする
Bloch 球上で平均した忠実度

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &= \frac{1}{8} \sum_{st}^{\pm} \langle (1 + \vec{n} \cdot s\vec{m}_1)(1 + \vec{n} \cdot t\vec{m}_2)(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_{st}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{st}^{\pm} \{ \vec{n}_{st} \cdot (s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2) \} \end{aligned}$$



別々に測定した場合の忠実度の最大値

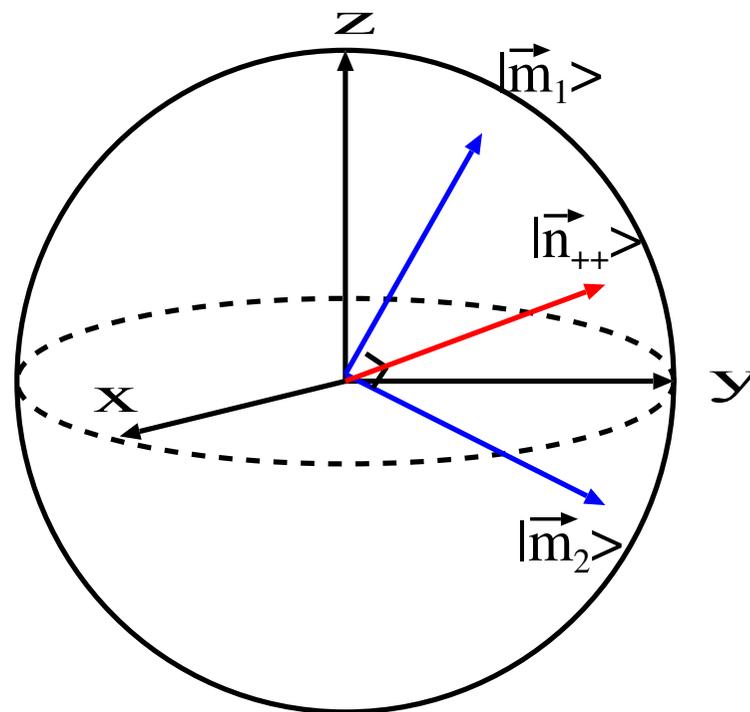
$\langle F_1 \rangle$ が最大となるようにシュワルツの不等式などを使うと

$$\begin{cases} \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0 \\ \vec{n}_{st} = \frac{s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2}{|s\vec{m}_1 + t\vec{m}_2|} \end{cases}$$

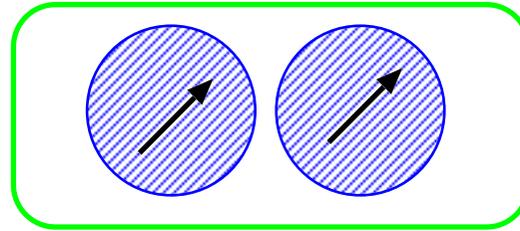
のときに最大値

$$\langle F_1 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

をとる



(2)1つの系とみなしての測定



Bloch 球上で平均した忠実度 $\langle F_2 \rangle$ の一般式を求める

正規直交基底 $\{|\phi_\alpha\rangle\}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) で測定、推定した状態を $|\vec{n}_\alpha\rangle$ とする

$$\langle F_2 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha=1}^4 (1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_\alpha) |\langle \phi | \phi_\alpha \rangle|^2 \right\rangle$$

シュワルツの不等式を用いると

$$\langle F_2 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^4 |\langle \phi_\alpha | \vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2) | \phi_\alpha \rangle|$$

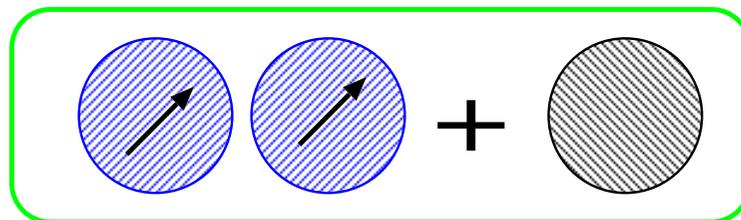
ベル基底

2-qubitの正規直交基底としてベル基底を用いて測定

$$\left\{ \begin{array}{l} |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{m}_1\rangle|\vec{m}_2\rangle + |-\vec{m}_1\rangle|-\vec{m}_2\rangle) \\ |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{m}_1\rangle|-\vec{m}_2\rangle + |-\vec{m}_1\rangle|\vec{m}_2\rangle) \\ |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{m}_1\rangle|-\vec{m}_2\rangle - |-\vec{m}_1\rangle|\vec{m}_2\rangle) \\ |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{m}_1\rangle|\vec{m}_2\rangle - |-\vec{m}_1\rangle|-\vec{m}_2\rangle) \end{array} \right.$$

しかしこの結果は $\langle F_2 \rangle = \frac{1}{2}$ となり、取りうる最も小さい値となった
また、今回は他によい値の得られる正規直交基底が見つからなかった
⇒ 補助qubitの導入

(3) 補助 qubit を用いて測定



与えられた qubit に自分の持っていた qubit を加えて測定
⇒ 1 つめと 2 つめの qubit の方向を揃えることができる

$$\langle F_2 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha=1}^4 |\langle \phi_{\alpha} | \underline{\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)} | \phi_{\alpha} \rangle|$$

補助 qubit を用いた場合の忠実度 $\langle F_3 \rangle$ 、正規直交基底 $\{|\phi_{\alpha'}\rangle\}$ ($\alpha' = 1, 2, \dots, 8$) で測定

$$\langle F_3 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha'=1}^8 |\langle \phi_{\alpha'} | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle\langle 0| \phi_{\alpha'} \rangle|$$

補助 qubit を用いた正規直交基底

$$\left\{ \begin{array}{l} |\phi_1\rangle = |e_x\rangle|e_x\rangle|e_x\rangle \\ |\phi_2\rangle = |-e_x\rangle|-e_x\rangle|e_x\rangle \\ |\phi_3\rangle = |e_z\rangle|e_z\rangle|-e_x\rangle \\ |\phi_4\rangle = |-e_z\rangle|-e_z\rangle|-e_x\rangle \\ |\phi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle|e_y\rangle|e_z\rangle + |-e_y\rangle|-e_y\rangle|-e_z\rangle) \\ |\phi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-e_y\rangle|-e_y\rangle|e_z\rangle + |e_y\rangle|e_y\rangle|-e_z\rangle) \\ |\phi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle|-e_y\rangle|e_z\rangle - |-e_y\rangle|e_y\rangle|e_z\rangle) \\ |\phi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_y\rangle|-e_y\rangle|-e_z\rangle - |-e_y\rangle|e_y\rangle|-e_z\rangle) \end{array} \right.$$

補助 qubit を用いた場合の忠実度

$\langle F_3 \rangle$ を求める

$$\begin{aligned}\langle F_3 \rangle &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \sum_{\alpha'=1}^8 |\langle \phi_{\alpha'} | (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)) \otimes |0\rangle \langle 0| \phi_{\alpha'} \rangle| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \times 6 \\ &= \frac{3}{4} = 0.75\end{aligned}$$

$\langle F_1 \rangle$ の最大値

$$\begin{aligned}\langle F_1 \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ &= 0.7357 \dots \doteq 0.74\end{aligned}$$

$$\therefore \langle F_1 \rangle < \langle F_3 \rangle$$

結論と今後の課題

結論

qubitの状態を別々に測定するより補助qubitを用いて3-qubitを1つの系とみなして測定した場合の忠実度が大きくなった

⇒ 補助qubitの有用性

今後の課題

- 補助qubitを用いずにより忠実度が大きくなるような正規直交基底の発見
- qubitの数がさらに増えた場合の最大の忠実度の決定

忠実度の最大値を求めるのに用いた不等式

- ・ コーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

$$\vec{n} \cdot \vec{a} \leq |\vec{a}| \quad (\vec{n} \text{ が単位ベクトルのとき})$$

- ・ $\sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}x + 1$

ある状態の qubit が 1 つ与えられた場合

正規直交基底 $\{|\vec{m}\rangle, |-\vec{m}\rangle\}$ で測定

忠実度 $F = P_+F_+ + P_-F_-$

$$\begin{aligned}\langle F \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \{1 + (\vec{m} \cdot \vec{n})^2\} \right\rangle \\ &= \frac{2}{3} = 0.66 \dots\end{aligned}$$

→ 測定に用いる基底によらない

また、補助 qubit を用いた場合も最大の忠実度は $\frac{2}{3}$