卒業論文発表会

1月16日，2007，福井大学工学部物理工学科

エンタングルメント変換における触媒効果

物理工学科　橋本麻美

量子エンタングルメント(Quantum entanglement)

古典bit　　　**0，1**

$\Updownarrow$

量子bit　　　**二つの状態しか持たない系**　**(** $|\,0\,\rangle$**，** $|\,1\,\rangle$ **)**
(qubit)

qubitが二つある場合
重ね合わせの原理

$$|\,\phi\,\rangle = \alpha_{00}|\,00\,\rangle + \alpha_{01}|\,01\,\rangle + \alpha_{10}|\,10\,\rangle + \alpha_{11}|\,11\,\rangle$$

EPR pair

$$|\,\Phi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$$

確率 $\frac{1}{2}$ $\quad |\,00\,\rangle$

確率 $\frac{1}{2}$ $\quad |\,11\,\rangle$

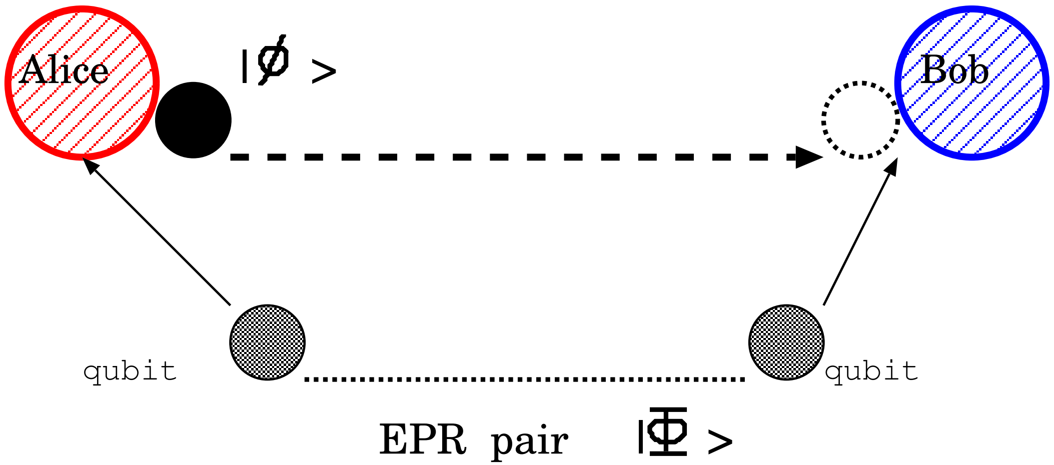
$$\begin{array}{ccc} |\,0\,\rangle & \longrightarrow & |\,0\,\rangle \\ |\,1\,\rangle & \longrightarrow & |\,1\,\rangle \end{array}$$

二つの測定結果のもつれ

$\Downarrow$

量子エンタングルメント

量子テレポーテーション(teleportation)



AliceはEPR pairを使って2bitの古典的情報を送るだけで
状態 $|\phi\rangle$ を**Bob**に送ることができる

エンタングルメント変換

$$|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$$
$$\Downarrow$$
$$|\,\phi\,\rangle = \cos\theta|\,00\,\rangle + \sin\theta|\,11\,\rangle$$

LOCC(Locol Operations and Classical Communication)
局所的演算 と 古典通信

のみで、$|\,\psi\,\rangle$を$|\,\psi\,\rangle$に変換できるだろうか？

$$|\,\phi_1\,\rangle = \alpha|\,0\,\rangle + \beta|\,1\,\rangle$$
$$|\,\phi_2\,\rangle = -\beta^*|\,0\,\rangle + \alpha^*|\,1\,\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}((\alpha|\,0\,\rangle+\beta|\,1\,\rangle)(\alpha^*|\,0\,\rangle+\beta^*|\,1\,\rangle)+(-\beta^*|\,0\,\rangle+\alpha^*|\,1\,\rangle)(-\beta|\,0\,\rangle+\alpha|\,1\,\rangle))$$

補助qubit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle)\ \ (\cos\theta|\,0\,\rangle + \sin\theta|\,1\,\rangle)$$

control　　　　　target

$\downarrow$ CNOT gate

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle(\cos\theta|\,0\,\rangle + \sin\theta|\,1\,\rangle) + |\,11\,\rangle(\cos\theta|\,1\,\rangle + \sin\theta|\,0\,\rangle))$$
$$= (\cos\theta|\,00\,\rangle + \sin\theta|\,11\,\rangle)|\,0\,\rangle + (\sin\theta|\,00\,\rangle + \cos\theta|\,11\,\rangle)|\,1\,\rangle$$

$\Rightarrow$ 補助qubitを使用すれば、ＬＯＣＣのみで変換できる

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,00\,\rangle + |\,11\,\rangle) \quad \longrightarrow \quad \cos\theta|\,00\,\rangle + \sin\theta|\,11\,\rangle$$

$x \prec y$ とは . . .

d 次元ベクトル
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$
$y = (y_1, y_2, \cdots, y_d)$

$$
\begin{aligned}
&x_1 \le y_1 \\
&x_1 + x_2 \le y_1 + y_2 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&x_1 + x_2 + \cdots + x_d = y_1 + y_2 + \cdots + y_d
\end{aligned}
$$

が成立するとき、
x **が** y **に** $majorize$ **されるといい、** $x \prec y$ **と表される**

$x \prec y$ と エンタングルメント変換の関係

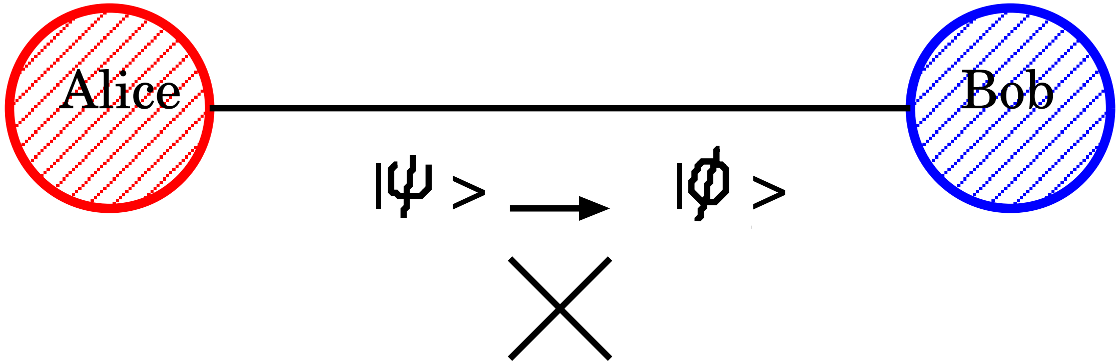
$$|\,\psi\,\rangle = \sqrt{x_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{x_1}|\,11\,\rangle$$
$\Downarrow$ LOCC
$$|\,\phi\,\rangle = \sqrt{y_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{y_1}|\,11\,\rangle$$

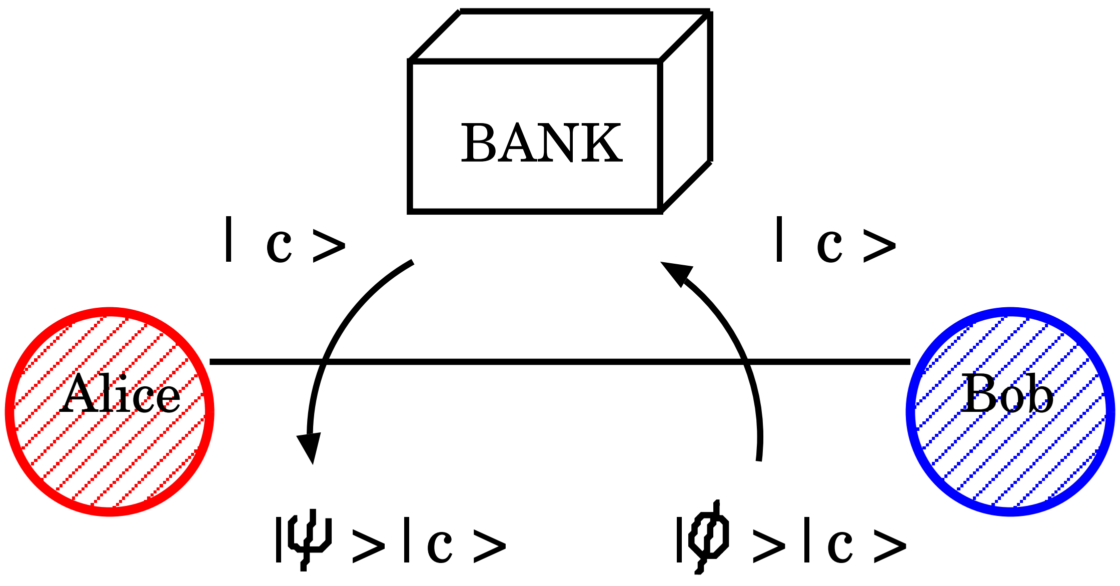
補助qubit $= \cos\alpha|\,0\,\rangle + \sin\alpha|\,1\,\rangle$

$$U_\theta|\,0\,\rangle = \cos\theta|\,0\,\rangle + \sin\theta|\,1\,\rangle$$
$$U_\theta|\,1\,\rangle = -\sin\theta|\,0\,\rangle + \cos\theta|\,1\,\rangle$$

$x \prec y$ であれば、状態 $|\,\psi\,\rangle$ は $|\,\phi\,\rangle$ に変換できる

触媒作用





触媒$|\,c\,\rangle = \alpha_0|\,00\,\rangle + \alpha_1|\,11\,\rangle$

２準位システム

$|\,\psi\,\rangle = \sqrt{x_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{x_1}|\,11\,\rangle$
$|\,\phi\,\rangle = \sqrt{y_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{y_1}|\,11\,\rangle$

３準位システム

$|\,\psi\,\rangle = \sqrt{x_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{x_1}|\,11\,\rangle + \sqrt{x_2}|\,22\,\rangle$
$|\,\phi\,\rangle = \sqrt{y_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{y_1}|\,11\,\rangle + \sqrt{y_2}|\,22\,\rangle$

$|\,\psi\,\rangle \;\; \longrightarrow \times \;\; |\,\phi\,\rangle \quad x \not\prec y$
$|\,\psi\,\rangle|\,c\,\rangle \;\; \longrightarrow \;\; |\,\phi\,\rangle|\,c\,\rangle \quad x\alpha \prec y\alpha$
$\Rightarrow$ 同時に満たさない

$|\,\psi\,\rangle = \sqrt{x_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{x_1}|\,11\,\rangle + \sqrt{x_2}|\,22\,\rangle + \sqrt{x_3}|\,33\,\rangle$
$|\,\phi\,\rangle = \sqrt{y_0}|\,00\,\rangle + \sqrt{y_1}|\,11\,\rangle + \sqrt{y_2}|\,22\,\rangle + \sqrt{y_3}|\,33\,\rangle$

$|\,\psi\,\rangle \;\; \longrightarrow \times \;\; |\,\phi\,\rangle \quad x \not\prec y$
$|\,\psi\,\rangle|\,c\,\rangle \;\; \longrightarrow \;\; |\,\phi\,\rangle|\,c\,\rangle \quad x\alpha \prec y\alpha$
$\Rightarrow$ 同時に満たす

４準位システム以上の状態 $|\,\psi\,\rangle$ が触媒を借りると、
状態 $|\,\psi\,\rangle|\,c\,\rangle$ が $|\,\phi\,\rangle|\,c\,\rangle$ に変換できる

4準位システムの場合の必要条件

$$
\begin{aligned}
&x_0 \le y_0 \\
&x_0 + x_1 > y_0 + y_1 \\
&x_0 + x_1 + x_2 \le y_0 + y_1 + y_2 \\
&x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0.50,\ \ x_1 = 0.40,\ \ x_2 = 0.05,\ \ x_3 = 0.05 \\
&y_0 = 0.70,\ \ y_1 = 0.15,\ \ y_2 = 0.15,\ \ y_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0.50,\ \ x_1 = 0.35,\ \ x_2 = 0.10,\ \ x_3 = 0.05 \\
&y_0 = 0.60,\ \ y_1 = 0.20,\ \ y_2 = 0.20,\ \ y_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0.60,\ \ x_1 = 0.30,\ \ x_2 = 0.05,\ \ x_3 = 0.05 \\
&y_0 = 0.70,\ \ y_1 = 0.15,\ \ y_2 = 0.15,\ \ y_3 = 0
\end{aligned}
$$

状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ が必要条件を満たしても、
$|\psi\rangle|c\rangle$ が $|\phi\rangle|c\rangle$ に変換できるとは限らない

自己触媒 ①

$|\psi\rangle \ \rightarrow \times \ |\phi\rangle \quad x \nprec y$
$|\psi\rangle|\psi\rangle \ \rightarrow \ |\phi\rangle|\phi\rangle \quad xx \prec yy$

☆４準位システム以上で $|\psi\rangle|\psi\rangle$ から $|\psi\rangle|\psi\rangle$ に変換できるx、yの組み合わせが存在する

４準位システムの場合の必要条件

$$
\begin{aligned}
&x_0 \le y_0 \\
&x_0 + x_1 > y_0 + y_1 \\
&x_0 + x_1 + x_2 \le y_0 + y_1 + y_2 \\
&x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3
\end{aligned}
$$

状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ が必要条件を満たしても、$|\psi\rangle|\psi\rangle$ が $|\phi\rangle|\phi\rangle$ に変換できるとは限らない

自己触媒 ②

$|\psi\rangle \rightarrow$ × $|\phi\rangle \quad x \nprec y$

$|\psi\rangle|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle|\phi\rangle \quad xx \prec yy$

$\Downarrow$

?

$|\psi\rangle|\psi\rangle|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle|\phi\rangle|\phi\rangle \quad xxx \prec yyy$

乱数	$xx \prec yy$	$xxx \prec yyy$
10,000	25	25
1,00000000	249,033	249,033

乱数	$xxx \prec yyy$	$xx \prec yy$	$xx \nprec yy$
10,000	404	233	171
1,00000000	448,025	249,033	198,992

自己触媒 ③

$$|\psi\rangle \longrightarrow \times\ |\phi\rangle \quad x \nprec y$$

$$|\psi\rangle|\psi\rangle|\psi\rangle \longrightarrow |\phi\rangle|\phi\rangle|\phi\rangle \quad xxx \prec yyy$$

$$\Downarrow\ \Uparrow$$

$$|\psi\rangle|\psi\rangle|\psi\rangle|\psi\rangle \longrightarrow |\phi\rangle|\phi\rangle|\phi\rangle|\phi\rangle \quad xxxx \prec yyyy$$

乱数	$xxx \prec yyy$	$xxxx \prec yyyy$	$xxxx \nprec yyyy$
100,000	404	400	4
1,00000000	448,025	249,033	198,992

乱数	$xxxx \prec yyyy$	$xxx \prec yyy$	$xxx \nprec yyy$
100,000	494	400	94
1,00000000	535,060	443,060	92,000

乱数	$xxxx \prec yyyy$	$xx \prec yy$	$xx \nprec yy$
100,000	494	233	261
1,00000000	535,060	249,033	286,027

結論

- 状態 $|\psi\rangle$ を $|\phi\rangle$ に変換できなくても $|\psi\rangle|c\rangle$ を $|\phi\rangle|c\rangle$ に変換できるような触媒 $|c\rangle$ は存在する

- ４準位システムの系が触媒をとりうる最も簡単な系である

- 必要条件を満たすからといって触媒、自己触媒ともに効果を発揮できるわけではない

- $|\psi\rangle|\psi\rangle$ を $|\phi\rangle|\phi\rangle$ に変換できるとき、同時に $|\psi\rangle|\psi\rangle|\psi\rangle$ を $|\phi\rangle|\phi\rangle|\phi\rangle$ に変換できると思われる
  $\longrightarrow$ しかし理論的に証明はできていないため、確かなものにすることが今後の課題である