11　座標系・ベクトルの復習

11.1　始める前に

11.1.1　三次元ベクトル

ここでは、数学の抽象的なベクトルではなく、我々の住んでいる、物理の対象になる三次元空間のベクトルについて、簡単に復習をしておく。ベクトルとは、今の場合、三次元空間の二点 A,B を結ぶ「矢印」、つまり大きさと方向を持った量と考えればよい。

$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \text{大きさ}\ |AB| = \text{線分}\ AB\ \text{の長さ} \\ \text{方　向} \qquad = A\ \text{から}\ B\ \text{への方向} \end{cases}$$

ベクトルの同等

二つのベクトル $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ が次の条件を満たす時、これらの二つのベクトルは等しいと定義する。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|,\ \text{すなわち}\ AB = CD \\ AB \parallel CD,\ A\ \text{から}\ B\ \text{への方向と、}C\ \text{から}\ D\ \text{への方向とは同方向} \end{cases}$$

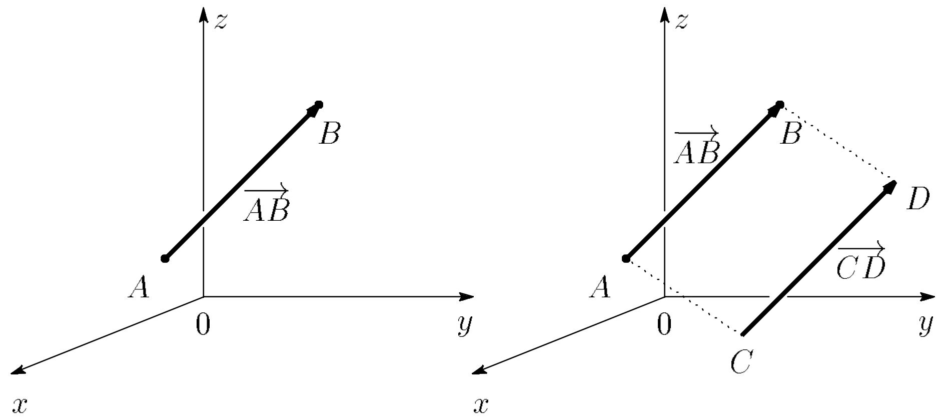


図 28: ベクトルの定義と同等

ベクトルの和と実数倍

二つのベクトルの和は次のように定義される。二つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ を

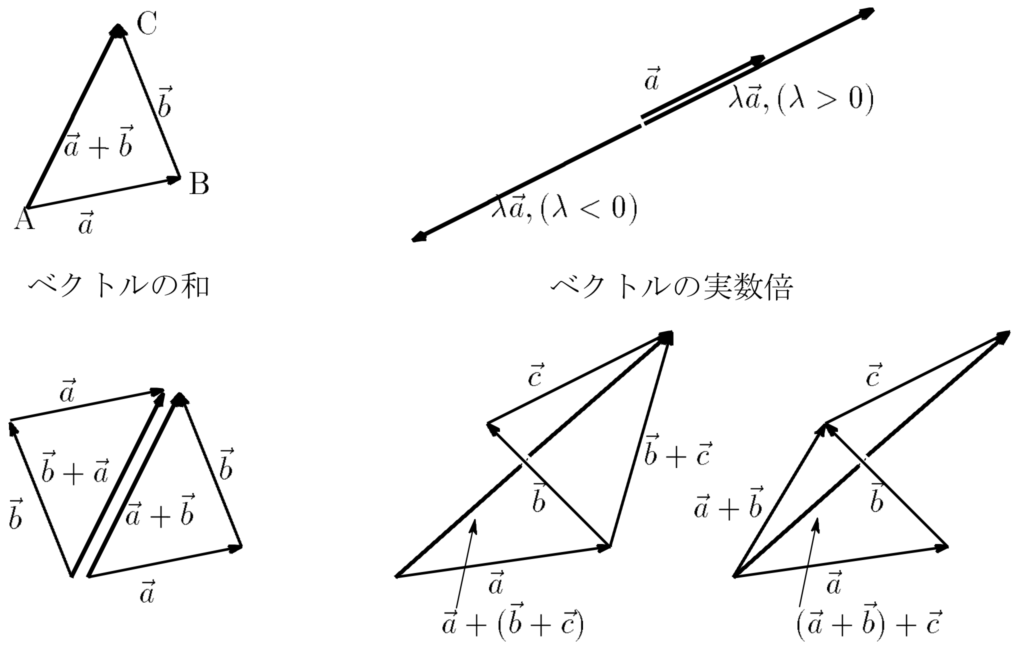
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC}$$

とすると、和は、

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$$

である。また、ベクトルの実数倍は

$$\lambda\vec{a} = \begin{cases} |\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| \\ \lambda\vec{a}\text{と}\vec{a}\text{とは同（逆）方向。もし}\lambda\text{が正（負）ならば} \end{cases}$$



ベクトルの和　　ベクトルの実数倍

ベクトルの和の交換則　　ベクトルの和の結合則

図 29: ベクトルの和と実数倍の定義と性質

ベクトルの和と実数倍の性質

(1)	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$	(ベクトルの和の交換則)
(2)	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$	(ベクトルの和の結合則)
(3)	$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$	(ベクトルの実数倍の分配則 (1))
(4)	$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$	(ベクトルの実数倍の分配則 (2))
(5)	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$	

位置ベクトル

ベクトルの応用として、位置ベクトルがある。例えば、質点の位置を表すのに、ベクトルが用いられる。これは、時刻 t における質点に位置 P を次のようなベクトルで表す方法である。

$$\text{位置ベルトル}\vec{r}(t)=\begin{cases}\text{ベクトルの大きさ }|\vec{r}|=\text{座標原点 }O\text{ と }P\text{ を結ぶ線分の長さ}\\ \text{ベクトルの方向}=\text{座標原点 }O\text{ から }P\text{ への方向}\end{cases}$$

速度 $\vec{v}(t)$ はこの位置ベクトルの時間微分で定義される。

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|$ は、近似的に、時間 Δt に移動する距離なので

$$\vec{v}(t)=\begin{cases}\text{大きさ }|\vec{v}(t)|=\text{単位時間（1 秒）当たりの移動距離}\\ \text{方　向}=\text{質点の軌跡の接線方向}\end{cases}$$

と言う意味をもつ。また、加速度 $\vec{a}(t)$ は単位時間当たりの速度の変化で、

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

である。一般的な議論であるときには、この位置ベクトルは便利であるが、運動方程式を解く際には座標系を導入した方が便利である。

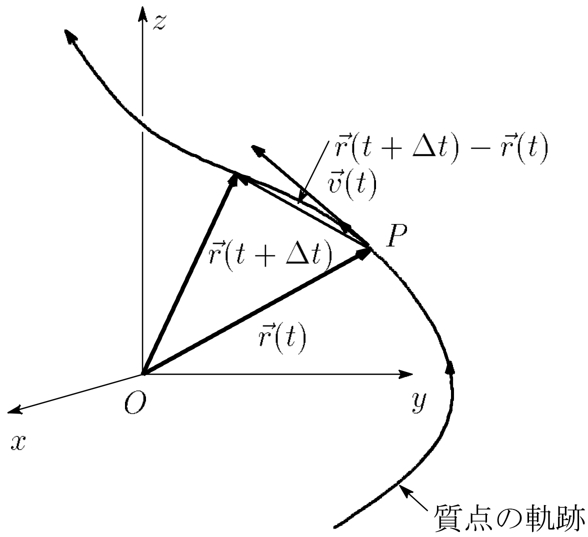


図 30: 位置ベクトルと速度の説明図

11.1.2 主な座標系

ここでは、よく使われる三つの座標系を紹介する。

デカルト座標はもっとも簡単でよく使われるものである。座標原点を通る互いに直交する三本の座標軸（x 軸、y 軸及び z 軸）を設定し、それぞれの座標軸に正の方向を決める。表したい点 P から各座標軸に垂線をおろし、その垂線の足と原点との間の距離 x, y, z で点 P 表す。ただし、座標原点から正の方向と逆の場所に垂線の足があるときには、負の値を対応させせる。また、位置ベクトルを表すために、各座標軸の正の方向を向く長さ 1 のベクトル $\hat{e}_x$ $\hat{e}_y$ 及び $\hat{e}_z$ を導入する。

$$|\hat{e}_x| = |\hat{e}_y| = |\hat{e}_z| = 1,$$
$$\hat{e}_x \perp \hat{e}_y, \;\; \hat{e}_y \perp \hat{e}_z, \;\; \hat{e}_z \perp \hat{e}_x.$$

これらのベクトルを単位ベクトルと呼ぶ。点 P の位置ベクトル $\vec{r}$ は、これらの単位ベクトルと点 P の座標を用いて、

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \tag{20}$$

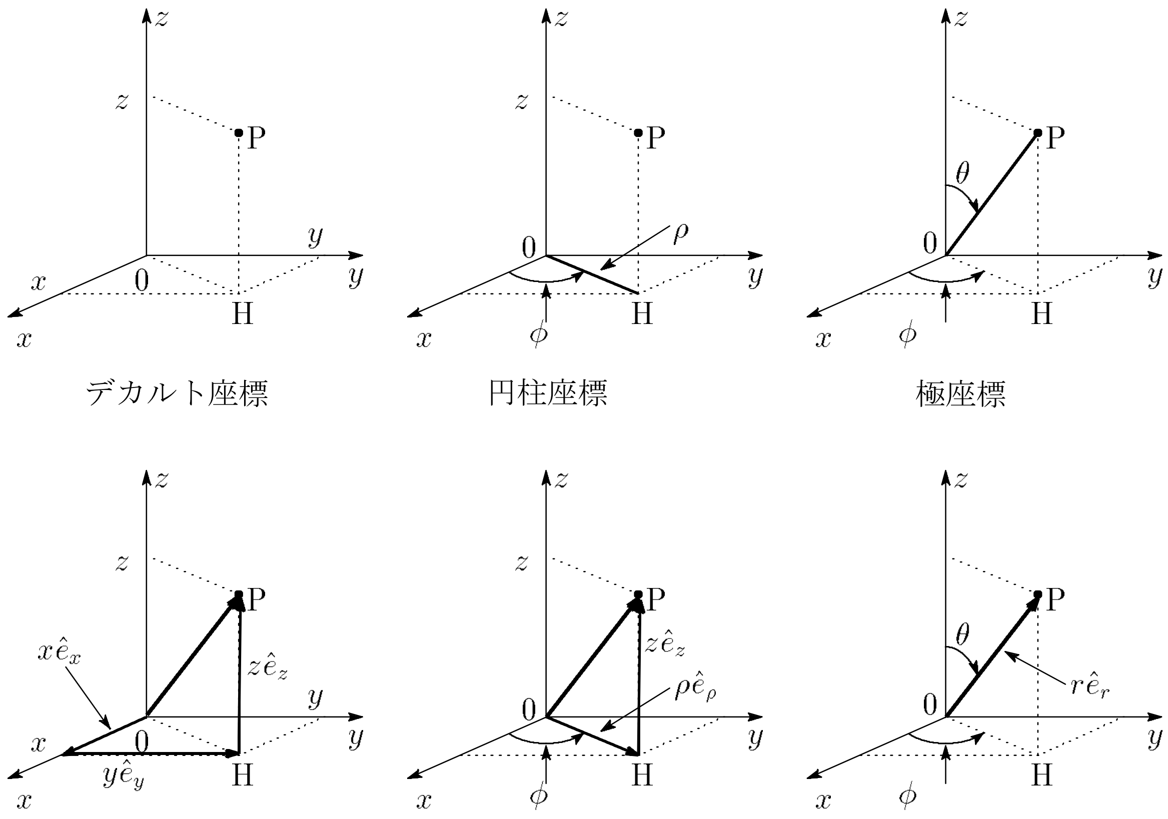


図 31: デカルト座標、円柱座標及び極座標 (上) 及び位置ベクトルの説明図

と書ける。

円柱座標系は、$xy-$ 平面では、いわゆる二次元の極座標にデカルト座標の $z-$ 座標を付け加えてものである。点 P から $xy-$ 平面の垂線をおろし、その足を H とすると、円柱座標系は、線分 OH の長さ ρ、$x-$ 軸と OH のなす角 ϕ 及び z 座標の三変数で、点 P で表す。デカルト座標 (x, y, z) と円柱座標 (ρ, ϕ, z) との関係は、図 19 から分かるように

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \sin\phi \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{array} \right. \tag{21}$$

である。位置ベクトル $\vec{r}$ は、図 19 の様に、新たに単位ベクトル $\hat{e}_\rho$ を及び $\hat{e}_\phi$ を座標 ρ、ϕ が増える方向に設定し、

$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z \tag{22}$$

と書ける。また、デカルト座標の単位ベクトルとの関係は、図 209 より、

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_x = \cos\phi\hat{e}_\rho - \sin\phi\hat{e}_\phi \\ \hat{e}_y = \sin\phi\hat{e}_\rho + \cos\phi\hat{e}_\phi \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_\rho = \cos\phi\hat{e}_x + \sin\phi\hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{e}_x + \cos\phi\hat{e}_y \end{array} \right. \tag{23}$$

である。

最後に、極座標について説明する。これは、点 P を線分 OP の長さ r、円柱座標の角度 ϕ 及び線分 OP と z 軸の正方向となす角度 θ の三変数で点 P を表す方法である。円柱座標との関係は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\rho}{z}\right) \end{array} \right. \tag{24}$$

であり、また、デカルト座標との関係は

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{array} \right. \tag{25}$$

である。位置ベクトルは、図 19 の様に単位ベクトル $\hat{e}_r$ と $\hat{e}_\theta$ をそれぞれ座標 r と θ の増える方向に選び、

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \tag{26}$$

と書ける。また、円柱座標の単位ベクトルと極座標の単位ベクトルとの関係は

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_\rho = \sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z = \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_r = \sin\theta\hat{e}_\rho + \cos\theta\hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta = \cos\theta\hat{e}_\rho - \sin\theta\hat{e}_z \end{array} \right. \tag{27}$$

であり、また、デカルト座標との関係は、

$$
\left\{\begin{array}{l}
\hat{e}_x = \sin\theta\cos\phi\hat{e}_r + \cos\theta\cos\phi\hat{e}_\theta - \sin\phi\hat{e}_\phi \\
\hat{e}_y = \sin\theta\sin\phi\hat{e}_r + \cos\theta\sin\phi\hat{e}_\theta + \cos\phi\hat{e}_\phi \\
\hat{e}_z = \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta
\end{array}\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}
\hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{e}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{e}_y + \cos\theta\hat{e}_z \\
\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\hat{e}_y - \sin\theta\hat{e}_z \\
\hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{e}_x + \cos\phi\hat{e}_y
\end{array}\right. \tag{28}
$$

となる。

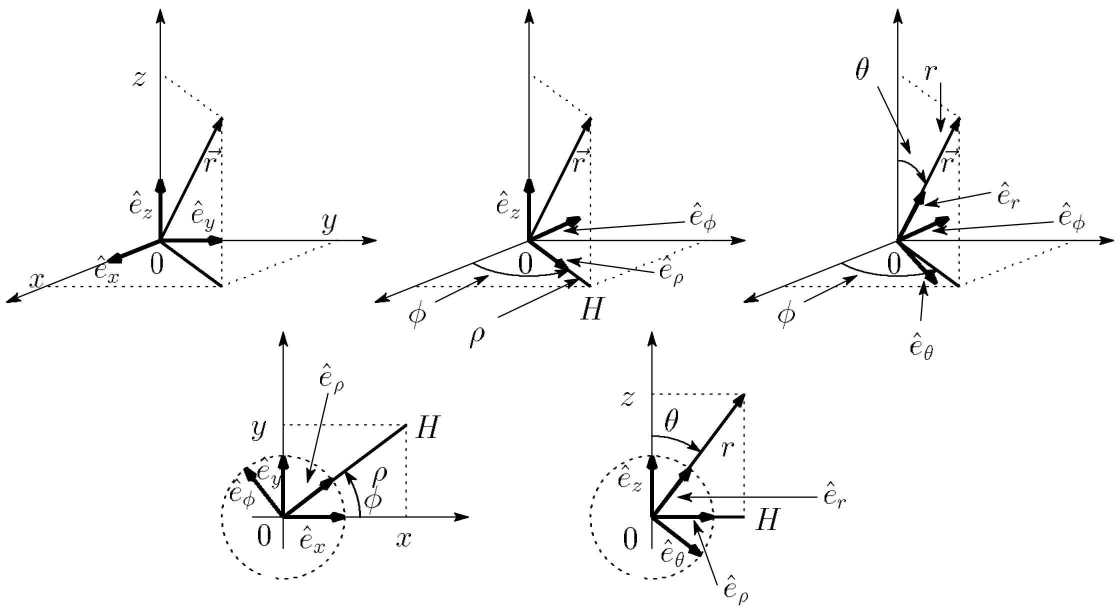


図 32: 各座標の単位ベクトルの説明図

各座標系に対して、単位ベクトルを定義したが、式 (23,28) から分かるように、$\hat{e}_x$、$\hat{e}_y$ 及び $\hat{e}_z$ は一定のベクトルであるが、$\hat{e}_\rho$、$\hat{e}_\phi$ 及び $\hat{e}_\theta$ は座標に依存しているため、質点の位置ベクトルを考えるとき、これらの単位ベクトル $\hat{e}_\rho$、$\hat{e}_\phi$ 及び $\hat{e}_\theta$ は時間の経過と共に変化する。

11.1.3 ベクトルの内積 (スカラー積）と外積 (ベクトル積）

ベクトル間の演算でよく使われる内積（スカラー積）と外積（ベクトル積）を紹介する。二つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が。デカルト座標で、

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z \\
\vec{b} &= b_x\hat{e}_x + b_y\hat{e}_y + b_z\hat{e}_z
\end{aligned}
$$

と表す時、二つのベクトルの内積を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

と定義する。この定義より、内積は次の性質を持つことが分かる。

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \\
&\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \\
&\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\
&\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})
\end{aligned}$$

また、外積は、

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{e}_z$$

と定義され、次の性質を満たす。

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\
&\vec{a} \times \vec{a} = 0 \\
&\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\
&\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})
\end{aligned}$$

外積の幾何学的な意味は、

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a} \times \vec{b}| = \text{二つのベクトルを二辺とする平行四辺形の面積} \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \ \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \end{cases}$$

である。また、外積の x、y 及び z の各成文は、それぞれ、二つのベクトル $\vec{a}$ 及び $\vec{b}$ を二辺とする平行四辺形を $yz-$ 平面、$zx-$ 及び $xy-$ 平面に射影して得られる平行四辺形の面積（又はそれの符号を変えたもの）に等しい。

11.2　基本問題

[1.1]

1) 位置ベクトル $\vec{r}_1$ 及び $\vec{r}_2$ が表す点を結ぶ線分を $\alpha_1 : \alpha_2$ に内分する点 A の位置ベクトルを求めよ。

2) 座標減点 O から、位置ベクトル $\vec{r}_1$ 及び $\vec{r}_2$ が表す点を結ぶ線分におろした垂線の足 B の位置ベクトルを求めよ ($\vec{r}_1$ 及び $\vec{r}_2$、と各ベクトルの大きさ r_1、r_2、二つのベクトルの内積 $a = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ を用いて表せ)。

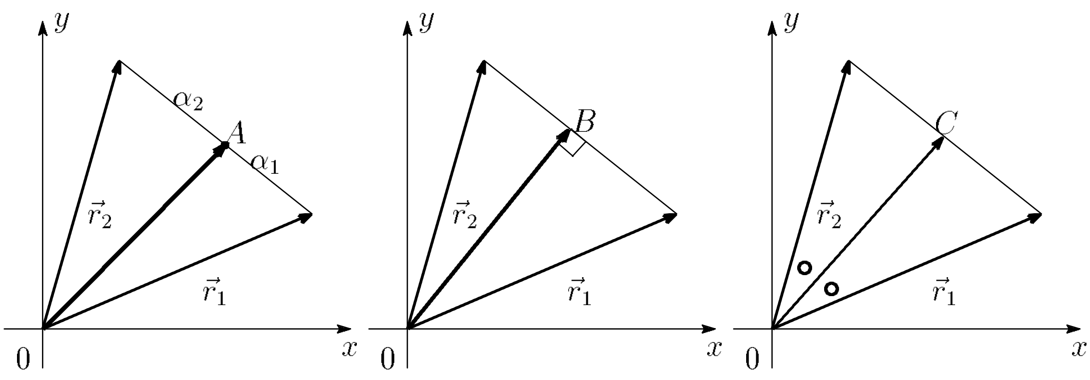


図 33: **[1.1]** の問題の図

3) 位置ベクトル $\vec{r}_1$ 及び $\vec{r}_2$ の間の角度を二等分する線と $\vec{r}_1$ 及び $\vec{r}_2$ が表す点を結ぶ線分との交点 C の位置ベクトルを求めよ。

[1.2] 下図に示した $xy-$ 平面上の二つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ に対して、上で定義した内積（スカラー積）と外積（ベクトル積）を計算せよ。また、二つのベクトルが成す角度を θ とすると、

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\
\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{cases} |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\ \ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b} \end{cases}
\end{aligned}
$$

と成ることを示せ。また、これらのベクトルを二辺とする平行四辺形の面積が $|a_xb_y - a_yb_x|$ と成ることを示せ。

[1.3] デカルト座標の単位ベクトル $\hat{e}_x$、$\hat{e}_y$ 及び $\hat{e}_z$ は

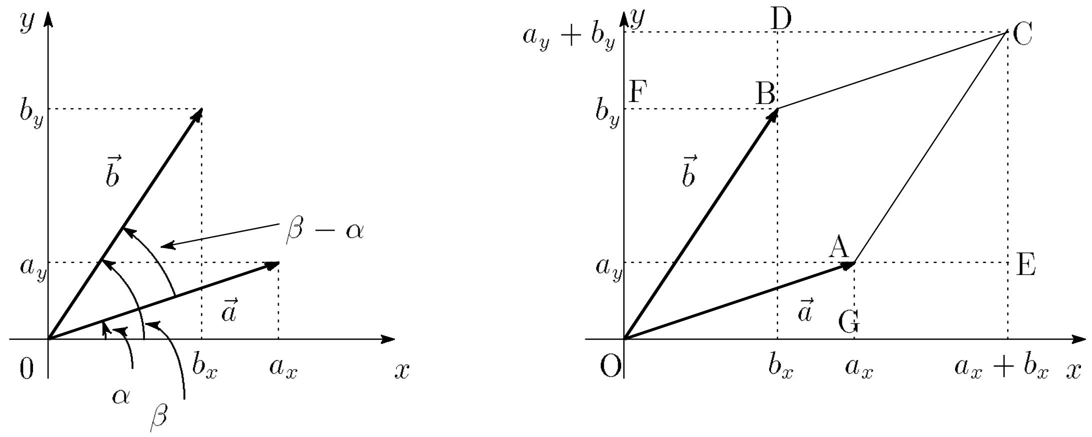
$$
\begin{aligned}
\hat{e}_x &= 1\cdot\hat{e}_x + 0\cdot\hat{e}_y + 0\cdot\hat{e}_z \\
\hat{e}_y &= 0\cdot\hat{e}_x + 1\cdot\hat{e}_y + 0\cdot\hat{e}_z \\
\hat{e}_z &= 0\cdot\hat{e}_x + 0\cdot\hat{e}_y + 1\cdot\hat{e}_z
\end{aligned}
$$

と書けるので、これを使って、単位ベクトル間の内積、外積、

$$
\begin{array}{llllll}
\hat{e}_x\cdot\hat{e}_x, & \hat{e}_x\cdot\hat{e}_y, & \hat{e}_x\cdot\hat{e}_z, & \hat{e}_y\cdot\hat{e}_y, & \hat{e}_y\cdot\hat{e}_z, & \hat{e}_z\cdot\hat{e}_z, \\
\hat{e}_x\times\hat{e}_x, & \hat{e}_x\times\hat{e}_y, & \hat{e}_x\times\hat{e}_z, & \hat{e}_y\times\hat{e}_y, & \hat{e}_y\times\hat{e}_z, & \hat{e}_z\times\hat{e}_z.
\end{array}
$$

を計算せよ。また、式 (23,28) で与えられる単位ベクトル $\hat{e}_\rho$、$\hat{e}_\phi$ 及び $\hat{e}_z$ 間、$\hat{e}_r$、$\hat{e}_\theta$ 及び $\hat{e}_\phi$ 間の内積、外積

$$
\begin{array}{llllll}
\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\rho, & \hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_z, & \hat{e}_\phi\cdot\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\phi\cdot\hat{e}_z, & \hat{e}_z\cdot\hat{e}_z, \\
\hat{e}_\rho\times\hat{e}_\rho, & \hat{e}_\rho\times\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\rho\times\hat{e}_z, & \hat{e}_\phi\times\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\phi\times\hat{e}_z, & \hat{e}_z\times\hat{e}_z.
\end{array}
$$



$$\vec{a} = a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y$$
$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$$
$$a_y = |\vec{a}|\sin\alpha$$

$$\vec{b} = b_x\hat{e}_x + b_y\hat{e}_y$$
$$b_x = |\vec{b}|\cos\beta$$
$$b_y = |\vec{b}|\sin\beta$$

図 34: **[1.2]** で使うベクトルと平行四辺形

及び

$$\begin{array}{cccccc} \hat{e}_r\cdot\hat{e}_r, & \hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta, & \hat{e}_r\cdot\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\theta, & \hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\phi\cdot\hat{e}_\phi, \\ \hat{e}_r\times\hat{e}_\theta, & \hat{e}_r\times\hat{e}_\theta, & \hat{e}_r\times\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\theta\times\hat{e}_\theta, & \hat{e}_\theta\times\hat{e}_\phi, & \hat{e}_\phi\times\hat{e}_\phi. \end{array}$$

を計算せよ。

[1.3] 直角二等辺三角形 ABO($\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{2}$) の直角でない角を二等分する線に平行なベクトル $\vec{R}$ (下図参) をベクトル $\vec{X} = \vec{\mathrm{OA}}, \vec{Y} = \vec{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また、このベクトルを用いて、$\cos\frac{\pi}{8}$ を求めよ。

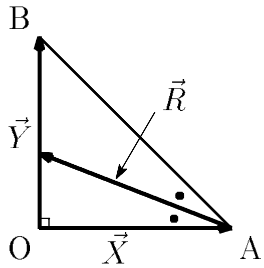


図 35: **[1.3]** で使う直角二等辺三角形と各ベクトル

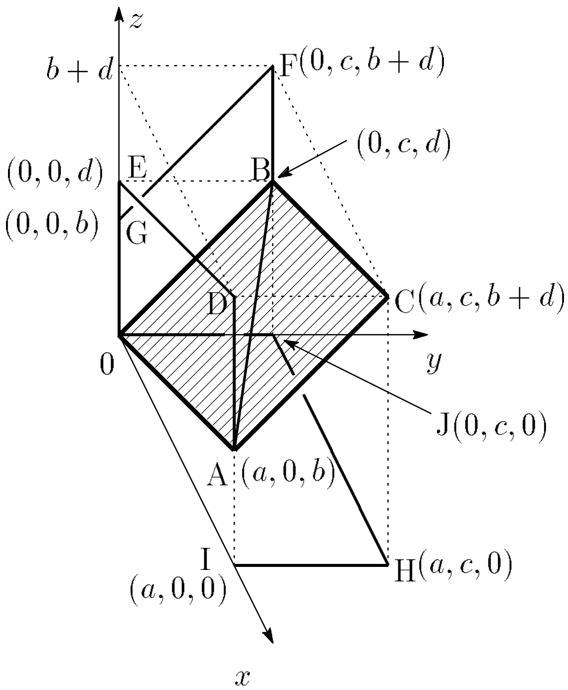
11.3 応用問題

[2.1] 下図に示した、原点に頂点があり、二辺がそれぞれ $zx-$ 平面及び $yz-$ 平面平上にある平行四辺形とそれの座標平面 ($xy-$ 平面、$yz-$ 平面及び $zx-$ 平面) への射影図に対してしたの問いに答えよ。

1. 平行四辺形をそれの座標平面 ($xy-$ 平面、$yz-$ 平面及び $zx-$ 平面）に射影して得られる平行四辺形 OIHJ、OBFG、OADE のそれぞれの面積、S_{XY}、S_{YZ} 及び S_{ZX} を求めよ。

2. 線分 AB の長さを求めよ。また三角形 OAB に余弦定理を適用し、$\cos\theta$ を求めよ。ここで、
$$\theta = \angle\mathrm{AOB}$$
である。また、$\sin\theta$ を求めよ。

3. 平行四辺形 OACB の面積 S を求め、S_{XY}、S_{YZ} 及び S_{ZX} で表せ。



平行四辺形 OACB の面積 $= S$

平行四辺形 OADE の面積 $= S_{ZX}$

平行四辺形 OIHJ の面積 $= S_{XY}$

平行四辺形 OBFG の面積 $= S_{YZ}$

図 36: [2.1] の図

[2.2] ベクトルの内積、外積に対する次の公式を証明または、設問に答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ の幾何学的意味を説明せよ。

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

(4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

11.4 宿題

[3.1]

1. 下の図のように、自由に回転できるように点 G で固定された剛体に二つの力 $\vec{F}_1$ 及び $\vec{F}_2$ が作用している。この剛体が回転しないための条件 $l_1, l_2, |\vec{F}_1|$ 及び $|\vec{F}_2|$ を用いて表せ。また、トルク (力のモーメント）の釣り合いの式を書き、この式が求めた剛体が回転しない条件と同等であることを示せ。

2. 質点の位置ベクトル $r(\vec{t})$ に対して、

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = r(\vec{t}) \times \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

を証明せよ。

3. 質点の運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$$

から、角運動量 $\vec{L}$

$$\vec{L}(t) = m\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

が方程式

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \vec{N}$$

を満たすことを示せ。ここで、

$$\vec{N} = \vec{r}(t) \times \vec{F}$$

である。

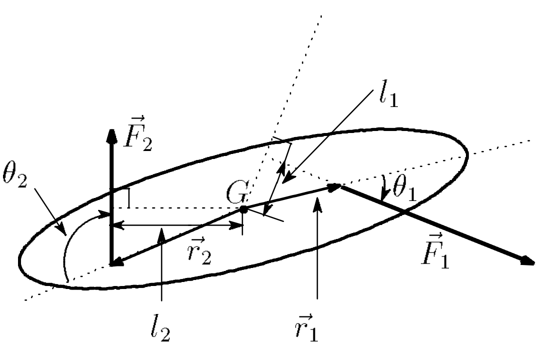


図 37: 問題 **[3.1]** の図

[3.2] 式 (23,28) 与えられている単位ベクトル $\hat{e}_\rho$、$\hat{e}_\phi$ 及び $\hat{e}_r$、$\hat{e}_\theta$ ついて、次式を証明せよ。

$$(1)\qquad \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi = \left(\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_z\right) \times \hat{e}_\rho$$

$$(2)\qquad \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\rho = \left(\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_z\right) \times \hat{e}_\phi$$

$$(3)\qquad \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta + \sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi = \left(\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_z\right) \times \hat{e}_r$$

$$(4)\qquad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_r + \cos\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi = \left(\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_z\right) \times \hat{e}_\theta$$

$$(5)\qquad \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}(\sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta) = \left(\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_z\right) \times \hat{e}_\phi$$

上の結果を使い、各座標での速度、加速度が下のように書けることを示せ。

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z \\
&= \frac{d\rho}{dt}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z \\
&= \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi \\
\frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_x + \frac{dy^2}{dt^2}\hat{e}_y + \frac{dz^2}{dt^2}\hat{e}_z \\
&= \left\{\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right\}\hat{e}_\rho + \left(\rho\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right)\hat{e}_\phi + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left\{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right\}\right]\hat{e}_r \\
&\quad + \left\{r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right\}\hat{e}_\theta \\
&\quad + \left\{r\sin\theta\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt} + 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right\}\hat{e}_\phi
\end{aligned}$$

[3.3] ⊿ABC において次のベクトルを、$\vec{AB}$ と $\vec{BC}$ を用いて表せ。

1) 辺 BC を $m_c : m_b$ に内分する点を点 Q、辺 AC を $m_c : m_a$ に内分する点を点 R とする時、点 A から線分 AQ と線文 BR の交点へのベクトル。

2) 辺 BC に点 A からおろした垂線の足を点 H、 辺 AC に点 B からおろした垂線の足を点 I とする時、点 A から線分 AH と線文 BI の交点へのベクトル。

3) 点 A から角 A の二等分線と角 B の二等分線の交点へのベクトル。

[3.4] ⊿ABC において次の問いに答えよ。

1) 辺 AB を $m_b : m_a$ に内分する点 P と点 C を結ぶ線上に [**3.3**] の 1) で求めた交点があることを示せ。

2) 辺 AB に点 C からおろした垂線の足を点 J と点 C を結ぶ線上に [**3.3**] の 2) で求めた交点があることを示せ。

3) 点 C の二等分線上に [**3.3**] の 3) で求めた交点があることを示せ。

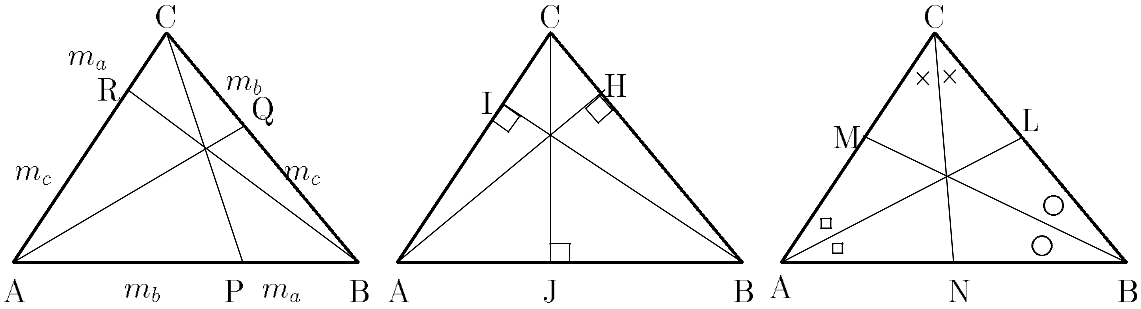


図 38: [**3.3**]、[**3.4**] で使う図

注意

次回は、二重積分の定義・公式の問題を出題するので教科書を読んでおくこと。また問題は、

http://apphy.u-fukui.ac.jp/~ horibe

にアップロードされています。