

Strutinsky法とKruppaの処方

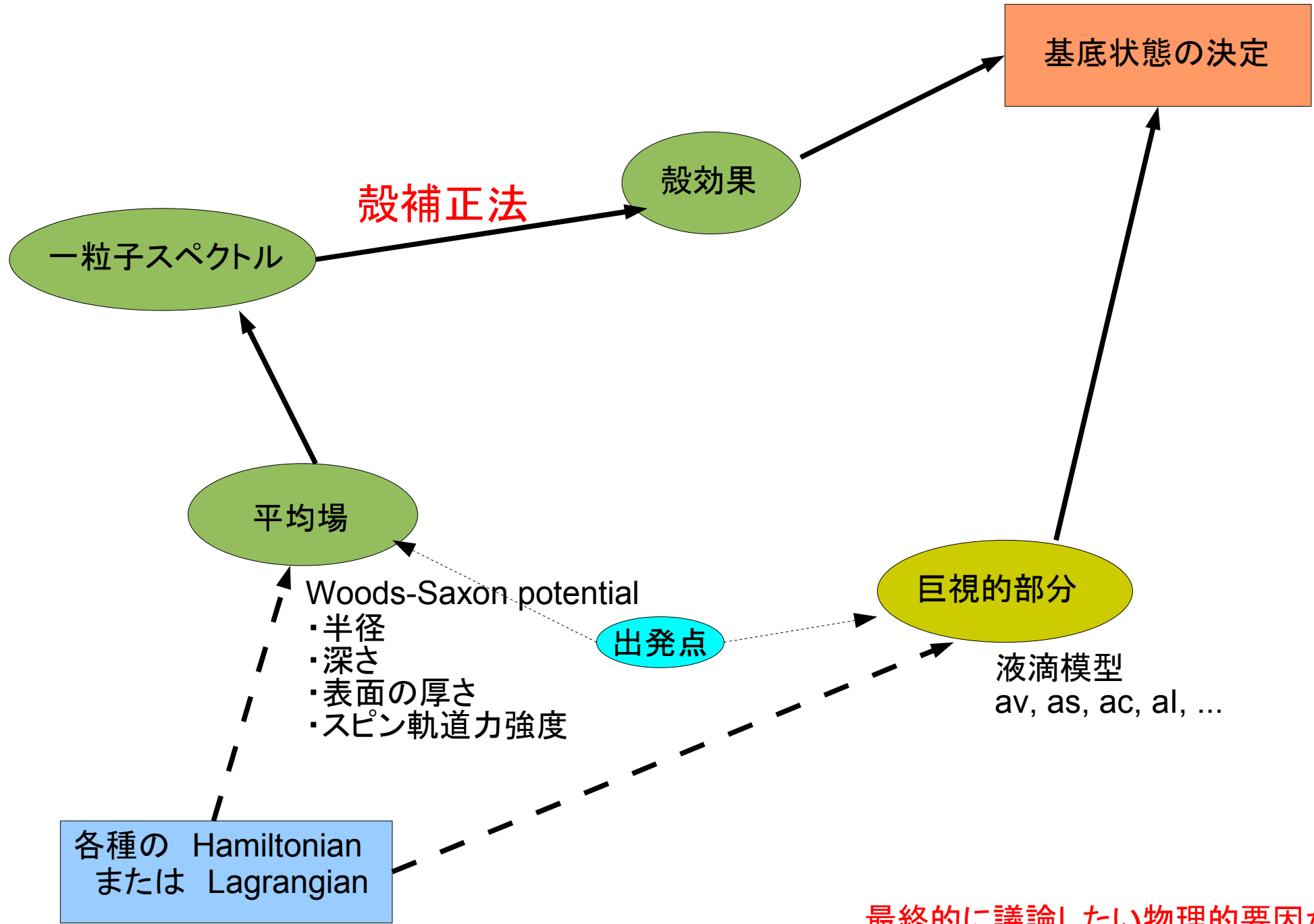
田嶋直樹、 清水良文、 高原哲士
(福井大工) (九州大理) (杏林大医)

内 容

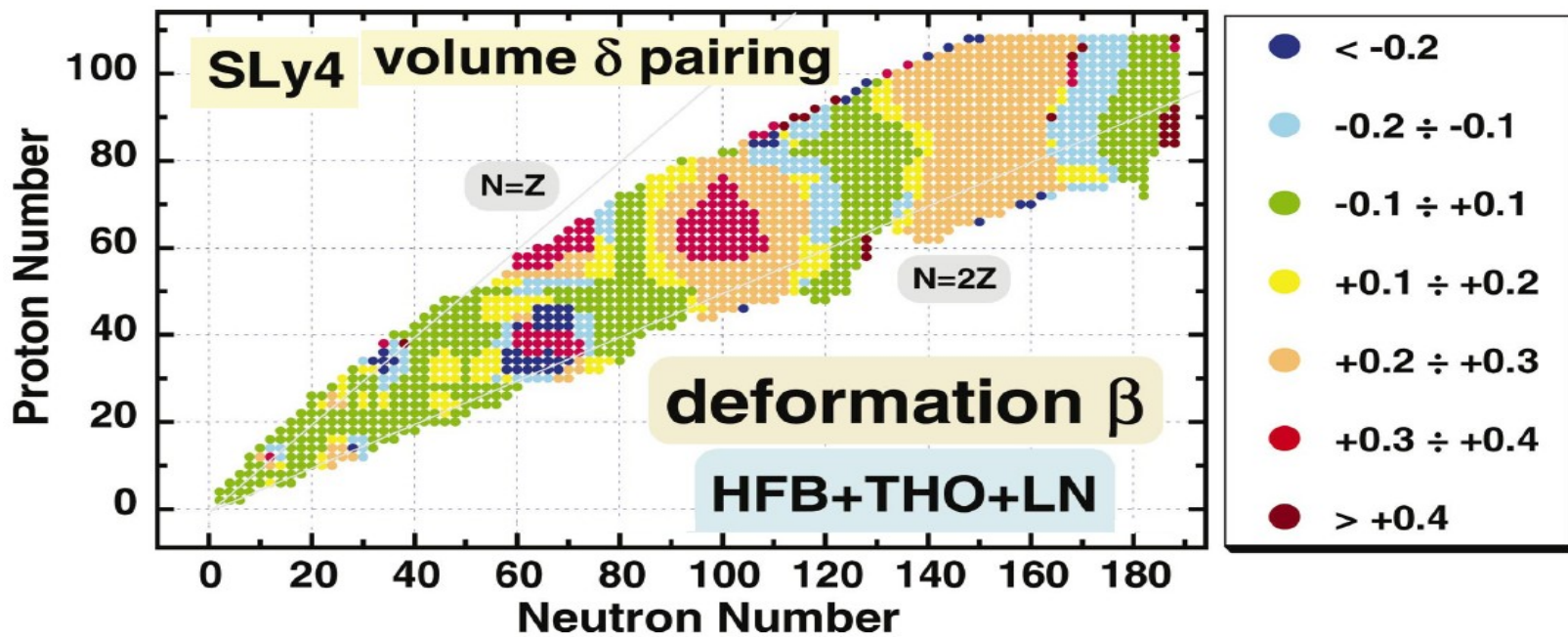
0. 殻補正法の持つ利点

1. 殻補正法で使われるStrutinskyの平滑化法の新たな見方
2. 殻補正への連続状態の寄与についてのKruppaの処方の意義付け

Strutinsky法とは



最終的に議論したい物理的要因がそのまま模型の入力となる。



平均場模型
による計算

M.V.Stoitsov et al.,
PRC68,054312(2003).

4800 processor·hours
(=200CPU×24時間)

殻補正法による計算

高原、大西、清水、田嶋、(執筆中)

Nmax: 調和振動子基底の主量子数上限

Nmax=12で

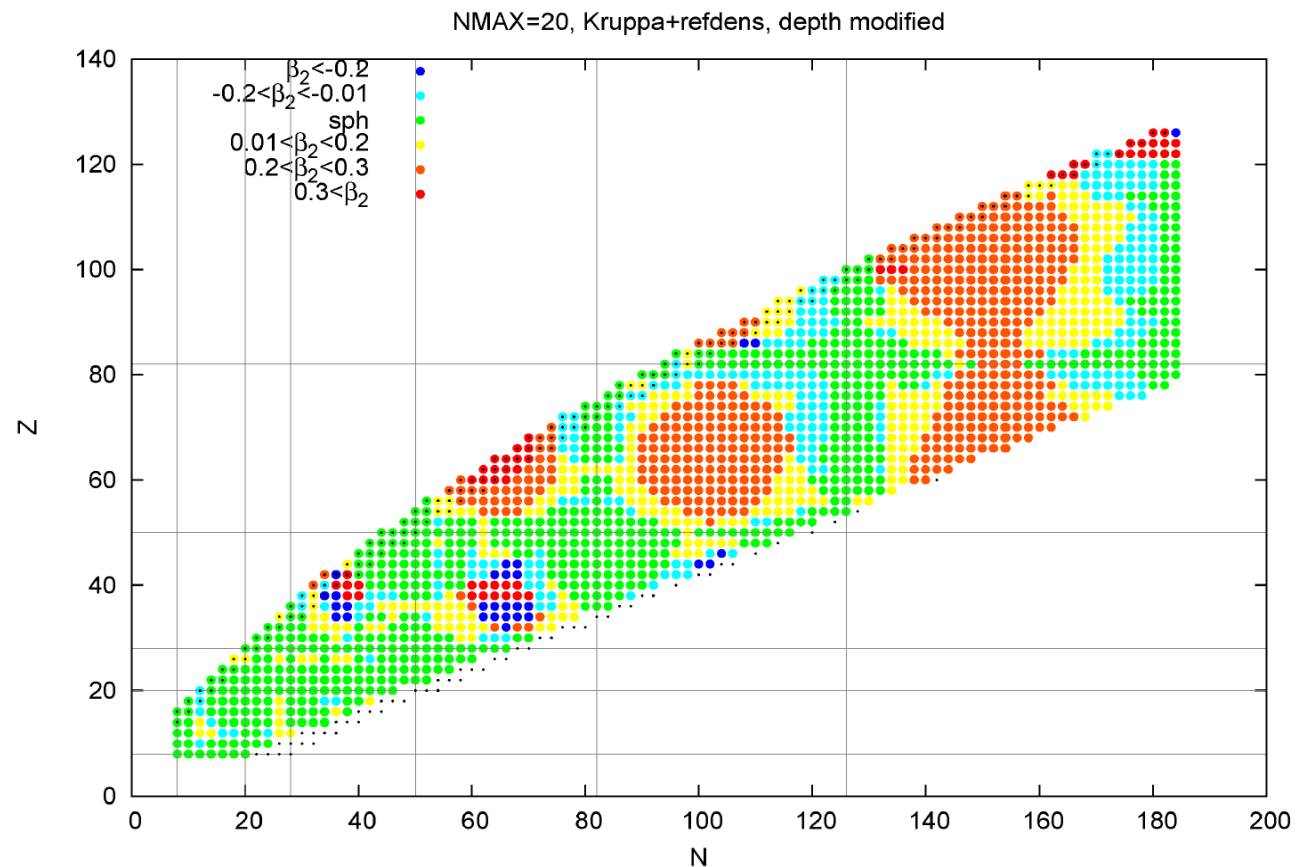
10 processor·hours
(=15CPU×40分)

Nmax=20で

47 processor·hours
(=15CPU×3.2時間)

計算量が桁違いに小さいことを利用して

- ♪ モデルパラメータの徹底的な最適化
- ♪ 現実とは異なる世界の原子核の議論等が可能になる。



Strutinsky法の歴史 (本研究に関連する事項)

- **Shell Correction Method** V.M.Strutinski (1967)
 - **Nilsson-Strutinsky method**
- **Woods-Saxon-Strutinsky method** Z.Szymanski et al. (1986頃～)
 - for high-spin nuclei , Nilsson's $l(l+1)$ potential should be replaced.
- **Finite-Range Droplet Model** Moller, Nix et al. (1995)
 - with shell correction for Folded Yukawa Potential
 - This result still seems to be the theoretical mass table.
- **Kruppa method** Kruppa et al. (1998)
 - treatment of the continuum in the harmonic oscillator basis

清水⇔高原・田嶋間の共同研究史

for Nilsson-Strutinsky method

ゼロスピン超変形をSkyrme-HFと比較 (1998)

偏長変形優勢の起源の探求 (2001-2002)

for Woods-Saxon-Strutinsky method

偏長変形優勢の起源の探求 (2005-)

まず、ドリップ線まで適用可能に改良する必要があった (2005-)

殻補正法とは

左側の一粒子準位スペクトル ϵ_i

準位密度に粗密がある。

右側の一粒子準位スペクトル ϵ_i

量子的効果を抜くことが可能なら
粗密は消えるはず。

(図では離散スペクトルとして描いてある
が、実際は連続な密度分布関数である。)

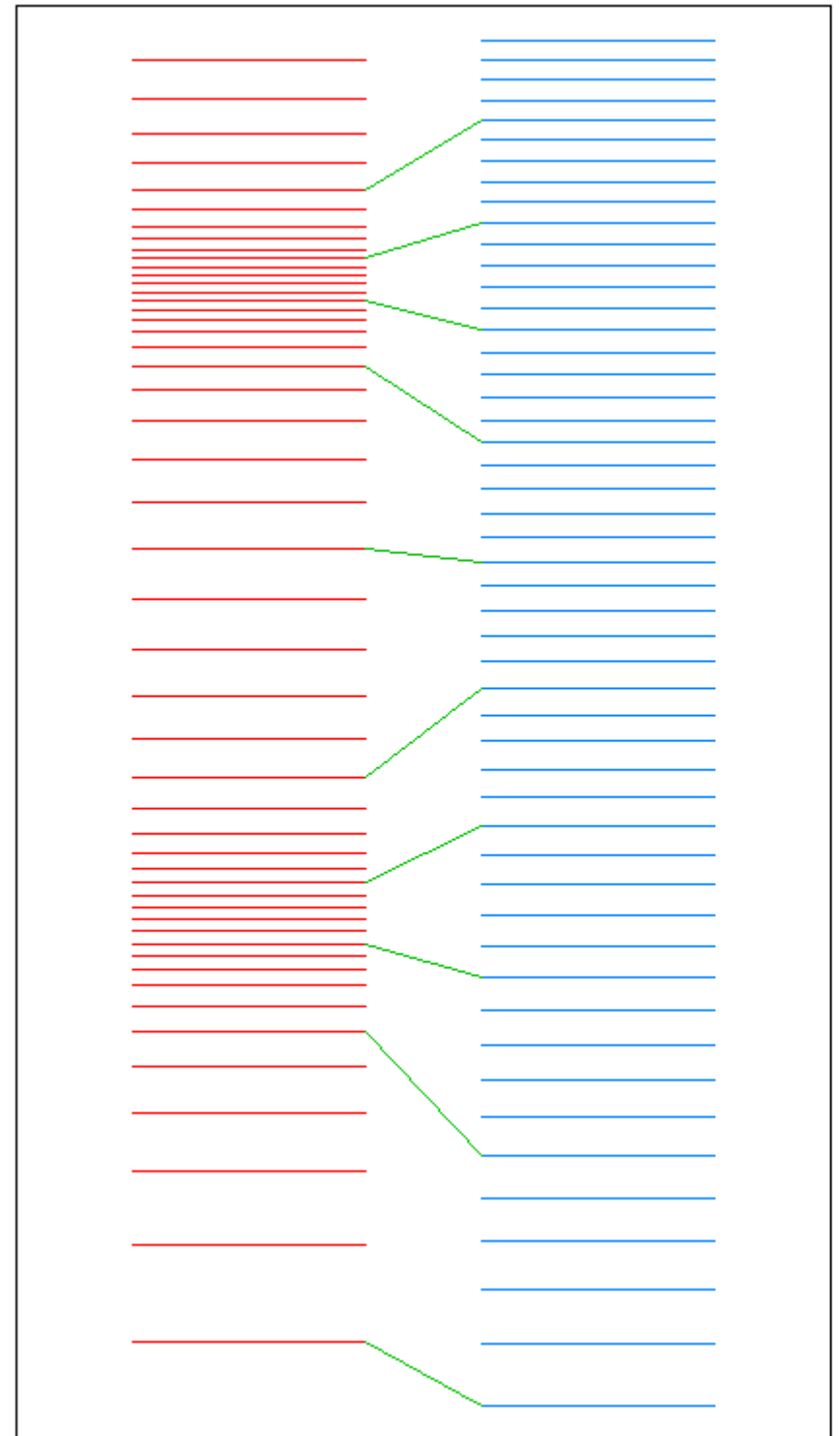
粗密を消すには何らかの平滑化処理を
すればよい。

平滑化した結果を、量子的効果を抜いた結
果とみなすことにする。

緑色の線分は順位に対応を表す

この線分の傾きが量子的効果による各準
位のエネルギーの得失を表す。

殻補正法では、
左右のスペクトルの差を量子的効果として
巨視的模型のエネルギーに加える



核の全束縛エネルギーの表式は、

$$E_{sh} = \sum_{i=0}^n \epsilon_i$$

$$\tilde{E}_{sh} = \sum_{i=0}^n \tilde{\epsilon}_i$$

および

E_{LDM} 液滴模型のエネルギー 等

を用いて、

$$E_{TOTAL} = E_{sh} - \tilde{E}_{sh} + E_{LDM}$$

と表される。

残る唯一の問題は、いかにして準位密度を平滑化するかである。

① Strutinskyの平滑化関数の新しい見方

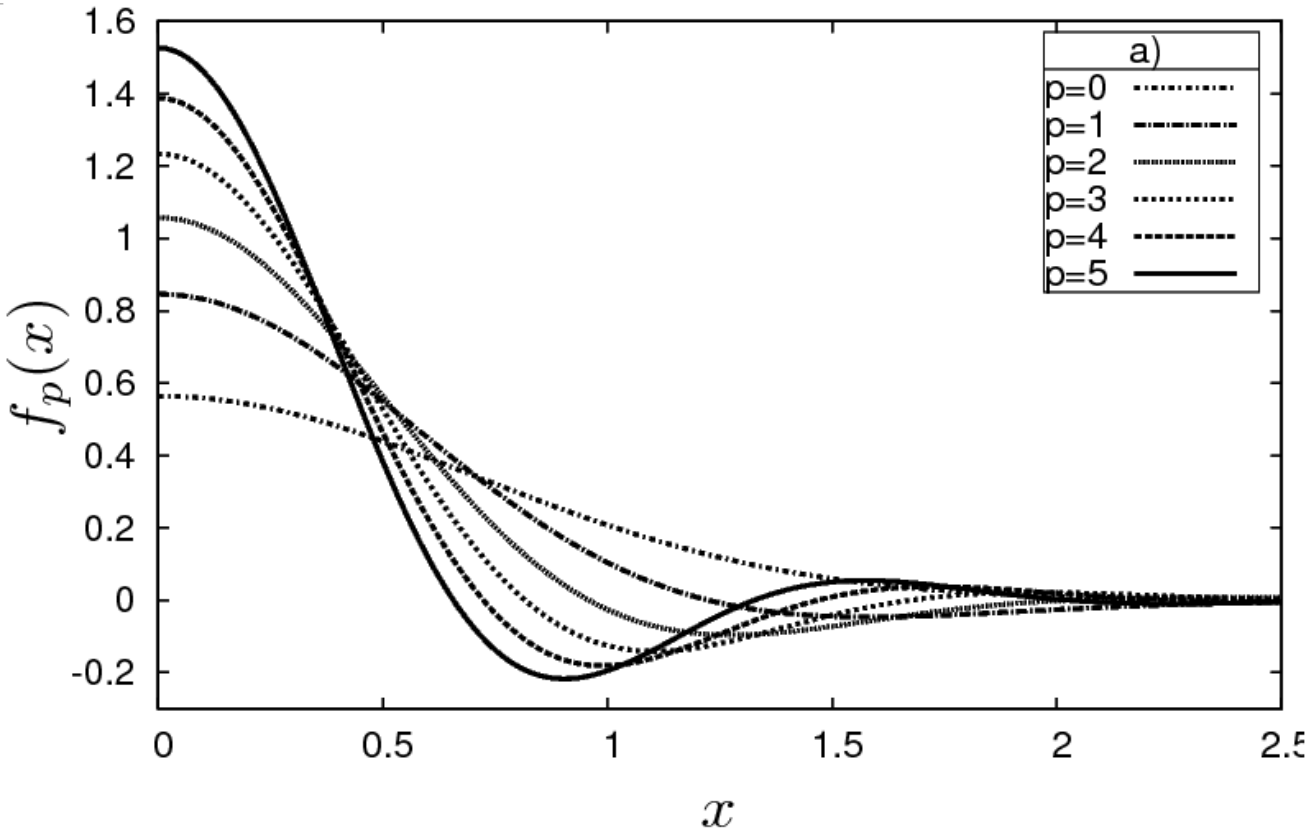
Strutinsky の平滑化法

$$g(\epsilon) = \sum_i \delta(\epsilon - \epsilon_i), \quad N = \int_{-\infty}^{\lambda} g(\epsilon) d\epsilon, \quad E_{\text{s.p.}} = \int_{-\infty}^{\lambda} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon$$

$$\tilde{g}(\epsilon) = \frac{1}{\gamma} \sum_i f_p \left(\frac{\epsilon - \epsilon_i}{\gamma} \right), \quad N = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\epsilon) d\epsilon, \quad \tilde{E}_{\text{s.p.}} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \epsilon \tilde{g}(\epsilon) d\epsilon,$$

デルタ関数を幅 γ 程度の関数で置き換える。幅 γ は主殻間隔程度にとる。

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} L_p^{1/2}(x^2) \quad (\text{generalized Laguerre polynomial})$$



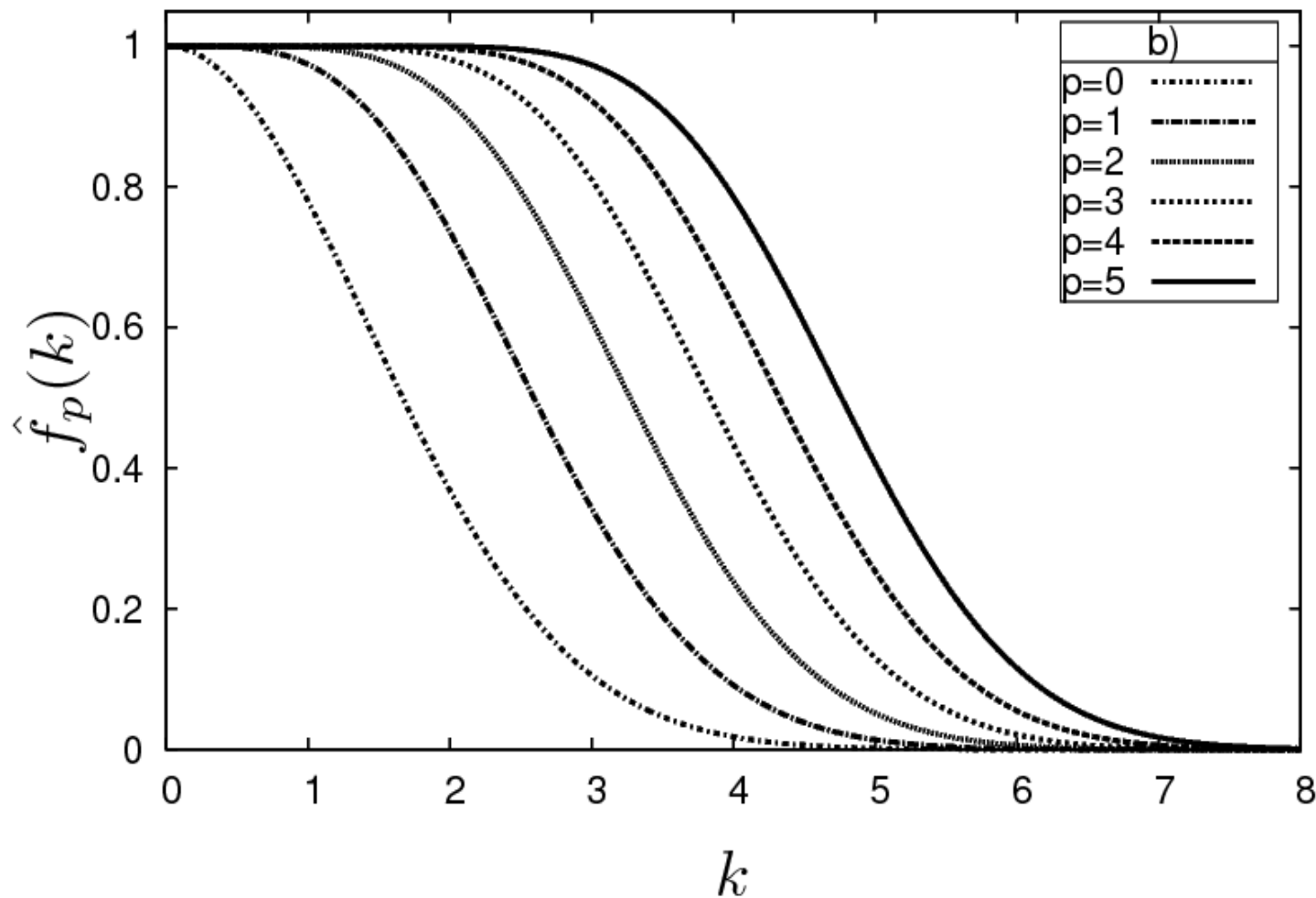
← 「2p次までの多項式を不変に保つ」という要請から決められた。

実は …… Fourier変換すると、要請したことは別の側面が見える！

$$\tilde{g}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} f_p \left(\frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma} \right) g(\epsilon') d\epsilon' \Leftrightarrow \hat{g}(\tau) = \hat{f}_p(\gamma\tau) \hat{g}(\tau)$$

但し、 $\hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ikx} dx$ で $(x, k) = \left(\frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma}, \gamma\tau \right)$ とした。

結果は… $\Rightarrow \hat{f}_p(k) = \frac{\left(e^{(k/2)^2} \text{の Taylor 展開を } \left(\frac{k}{2}\right)^{2p} \text{ 乗で打ち切ったもの} \right)}{e^{(k/2)^2}}$



特徴

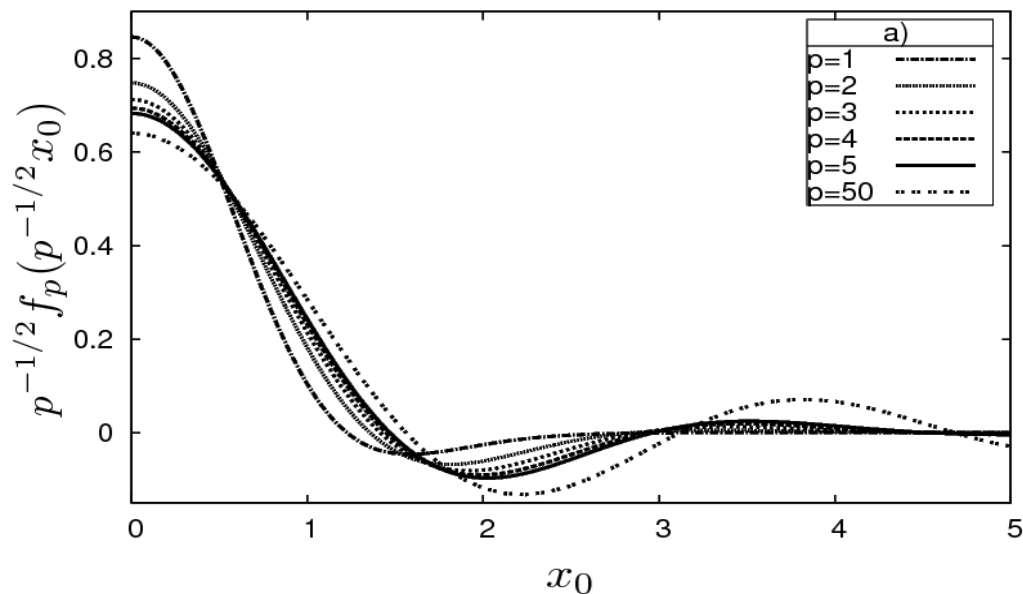
$$k_{\text{cut}} = 2\sqrt{p}$$

またcutoff付近の厚さはpにほとんど依存しない。

γとpの関係

$$\gamma = \sqrt{p} \gamma_0$$

のように、pの値に応じてγの値を変えれば…



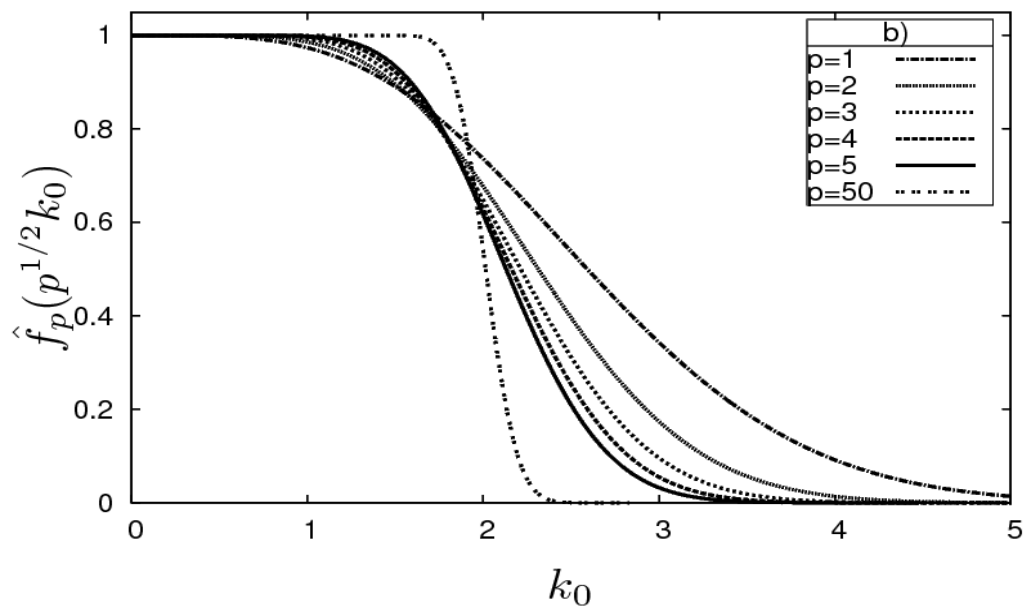
cutoffの位置を変えずに、フィルタの鋭さを変えることができる。

$p \rightarrow \infty$ では

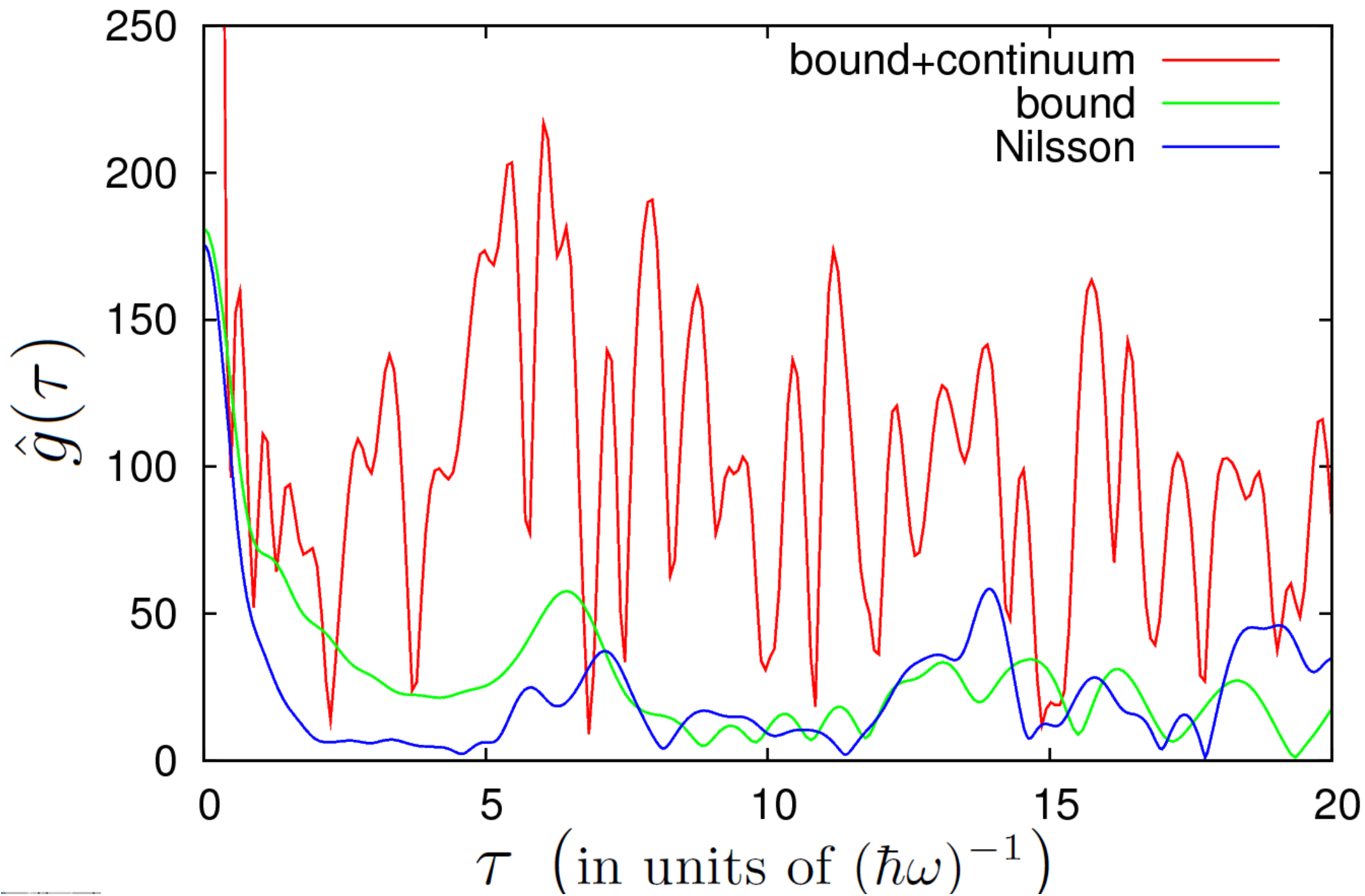
$$\hat{f}_p(k) \rightarrow \theta(2 - |k_0|), \quad k_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} = \gamma_0 \tau$$

$$f_p(x) dx \rightarrow \frac{\sin 2x_0}{\pi x_0} dx_0, \quad x_0 = \sqrt{p} x = \frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma_0}$$

エネルギー軸上での変換の局所性が失われる(幅 $\gamma \rightarrow \infty$)という問題が生じる。



Fourier transform of level densities(W.S)



② 殻補正法で正エネルギー状態を扱いに
関するKruppaの処方を理解するための
「調和振動子基底Thomas-Fermi近似」

Strutinsky の平滑化法の抱える大きな問題点

中性子のフェルミ準位が $-\gamma$ より高いと、連続スペクトルの影響が強くなる。

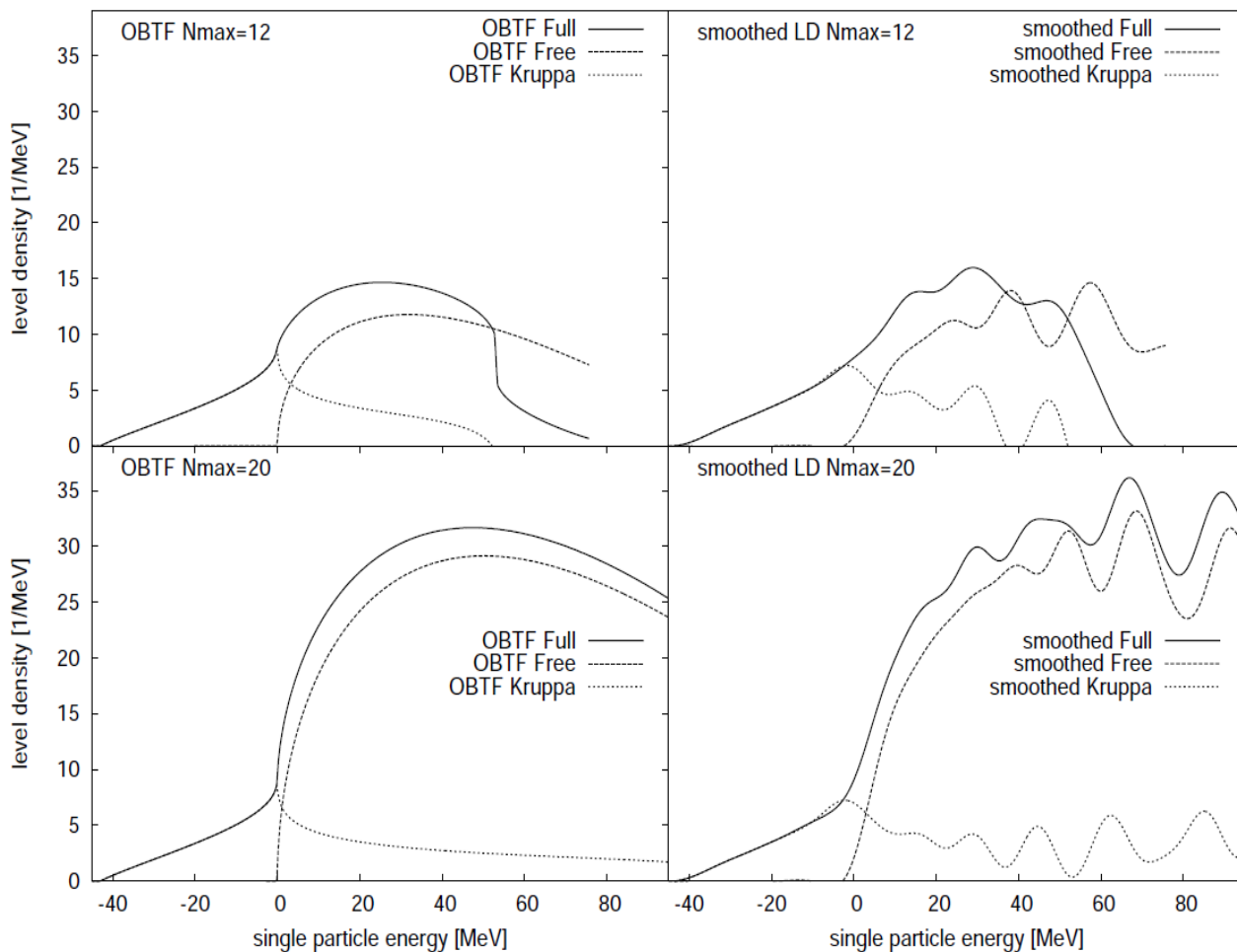
調和振動子基底による展開では、連続スペクトルの影響が、基底サイズに依存して変化する。少なくとも、結果の基底サイズ依存性は除去すべきである。

⇒ Kruppa法

Phys. Lett. B431, 237(1998).

Woods Saxon ポテンシャル中の
一粒子のスペクトル ϵ_i から、
自由粒子のスペクトル ϵ_i^0 を差し引く。

両者は同じ基底(M次元)での対角化
により求める。



$$g(\epsilon) = \sum_{i=0}^M \delta(\epsilon - \epsilon_i) \quad \Rightarrow \quad g^K(\epsilon) = \sum_{i=1}^M \delta(\epsilon - \epsilon_i) - \sum_{j=1}^M \delta(\epsilon - \epsilon_j^0)$$

Oscillator-Basis Thomas-Fermi approximation

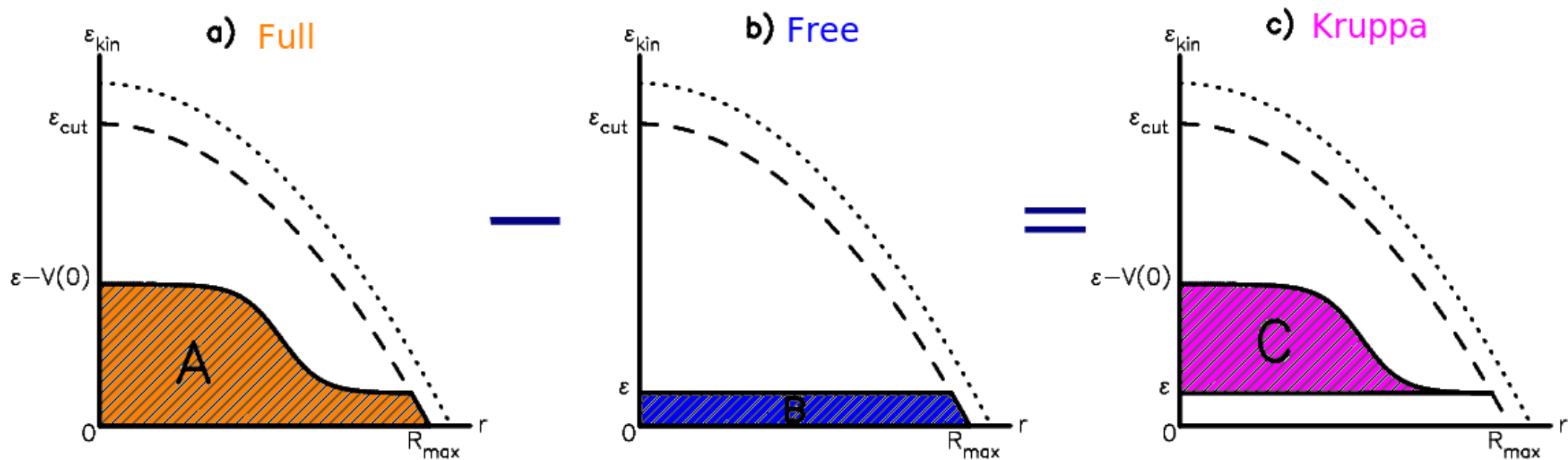
$$\epsilon_{\text{cut}} = \hbar\omega \left[(N_{\text{osc}}^{\text{max}} + 1)(N_{\text{osc}}^{\text{max}} + 2)(N_{\text{osc}}^{\text{max}} + 3) \right]^{1/3}$$

$$\epsilon_{\text{kin}}^{\text{max}}(r) = \max \left(\epsilon_{\text{cut}} - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, 0 \right)$$

$$\Gamma_{\text{OB}}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\epsilon} g_{\text{OB}}(\epsilon') d\epsilon' = \frac{2(2m)^{3/2}}{\pi\hbar^3} \int_A \epsilon_{\text{kin}}^{1/2} r^2 d\epsilon_{\text{kin}} dr$$

↑ or B, C

領域A,Bは ϵ_{cut} とともに拡大するが、
領域Cは変化しない。



Continuum level density

正エネルギーでは、Full HamiltonianとFree Hamiltonianの状態密度のそれぞれは無限大に発散するが、その差は、極限のとり方により、有限値として求まる。

例えば散乱のphase shiftのエネルギー微分として(=共鳴状態の密度として)

$$g(\epsilon) = \sum_{i:\text{bound}} \delta(\epsilon_i - \epsilon) + \frac{1}{\pi} \sum_{lj} (2j + 1) \frac{d\delta_{lj}(\epsilon)}{d\epsilon}$$

あるいはグリーン関数の跡として

$$g(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\text{tr} \frac{1}{H - \epsilon} - \text{tr} \frac{1}{H_0 - \epsilon} \right]$$

しかし、Kruppaの処方で求めるのが最も計算量が少なく、人間も楽である。

まとめ

0. 殻補正法の利点は、まず、計算が軽いため、
Nuclear Chart 1面の計算を繰り返すことが可能である。
(モデルパラメータの最適化のため／現実とは異なる世界の原子核を論じるため)
また殻補正法では現象とポテンシャルを直接結び付けて議論することができる。
1. Strutinskyの平滑化関数は、フーリエ変換して時間軸で見れば、
短時間成分のみを通す、歪みが最小のローパスフィルターであると分かった。

しかし、エネルギー軸で見れば、平滑化変換に局在性があるという利点を兼ね備えた
特殊なローパスフィルターなのである。

Nilsson Strutinsky法でプラトーがよく発達する理由、また、Woods-Saxon Strutinsky
法でプラトーが明瞭に出現しない理由は、時間軸で見ればわかる。
2. 連続状態の寄与には Kruppa法で対処できる。
Continuum level densityとは、Full HamiltonianとFree Hamiltonianの状態密度の
差である。これを求める最も楽な方法がKruppa法である。